1 7 147

QUADRATURA
CIRCULI,
ET HYPERBOLÆ

Per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas Quadrabiles Geometricè exhibita, & demonstrata.

EDITIO ALTERA AUCTIOR, ET ACCURATIOR

In qua, præter alia multa, ad veterem Appendicem de Rectificatione Curvarum, altera accessit de earundem, & Curvilineorum Spatiorum Transformatione infinitis modis expedienda.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO

Monacho Camaldulensi, in Pisana Universitate Publ. Phil. Professore Reg. Cels. M. D. Etruriæ Theologo, & Mathematico, Et Regiæ Societatis Sodali.

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM

JOANNEM GASTONEM

AB ETRURIA.

PISIS, MDCCX.

Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiep. *Superiorum permissu.*

SERENISSIMO PRINCIPI

D. JOANNI GASTONI MEDICEO

Pisanæ Universitatis Patrono Amplissimo

GUIDO GRANDUS FELICITATEM.

Desperata erat superioris ævi Geometris, quæ per tot sæcula irrito labore quæsita fuerat, Circuli & Hyperbolæ Quadratura: cùm tandem, felicibus ausis, recentiores Mathematici, novis methodis hujus Scientiæ pomæria in immensùm ampliare tentantes, repagulum hoc progressibus suis oppositum removere conati, ab ipsomet Infinito suppetias implorarunt. Vix ad ejus efficacissimæ potentiæ familiarem consuetudinem admissi erant, cùm se ad desideratam votorum metam perductos tandem agnoverunt: statim enim patuit, frustra inter finitorum terminorum angustias hactenus investigatum fuisse, quod unicè in ipsiusmet Infiniti vasto, & profundo sinu latebat. Scilicet, quemadmodum alia Problemata, suapte natura, plana sunt, alia solida, quædam etiam superioris, sed tamen finiti, gradus, ut propterea, quæ primi generis sunt, per solas simplices lineas, rectam, & circularem, in plano ortum habentes, expediri queant, quæ ad secundam classem pertinent per conicas sectiones, è solidorum superficie progenitas, resolvi debeant, quæ denique in tertia sunt differentia, lineas magis compositas, sive altioris gradus, ad sui enodationem requirant: ita ea est Circuli, & Hyperbolæ indoles, ut dimensio utriusque nonnisi per infinitam seriem quadrabilium terminorum tractari possit, nullaque geometrica linea, quantumvis elevati ordinis, & per æquationem quotlibet dimensionum exprimenda, se definiri patiatur. Hoc admirabile Quadraturæ genus, cùm per sese elegantissimum sit, & ad praxim etiam, aproximatione quamlibuerit exacta, satis accomodatum, per ambages tamen, & mysteria dumtaxat analyticarum expressionum, à summis Viris propositum fuerat, unde pleniorem, clarioremque geometricam demonstrationem adhuc desiderare videbatur. Quod cùm ego ante septennium præstiterim, tuoque Augusto Nomini, Serenissime Princeps, libellum de hoc argumento editum consecraverim, placuit nunc eundem in ampliorem, & commodiorem formam redactum, tuis iterum oculis sistere, ac potentissimò Patrocinio tuo secundam hanc editionem pariter communire. Hanc tum figuræ suis locis

resti-

reſtitutæ, tum plurima de novo addita, vel uberiùs illuſtrata commendant: inter quæ, tum à Cl. V. Renato des Cartes propoſita Circuli quadratura, per infinitam rectangulorum ſeriem procedens, in poſthumis ejus operibus, poſt primam mei libelli editionem, publicata, à me demonſtratur, aliæque tum Circuli, tum Hyperbolæ quadraturæ noſtræ, per infinitas rationes componentes determinatæ, adiectæ ſunt, ac denique Appendix altera acceſſit de Transformatione curvarum linearum, & ſuperficierum in alias æquales infinitis modis perficienda, quam XX Theorematibus maximè generalibus comprehendi. Præcipuum tamen totius operis decus, & ornamentum ex ampliſſimæ Protectionis tuę honore, Princeps Sereniſſime, dimanat, qui pro tua benignitate, & ſapientia, meos ad promovendam Geometriam conatus excipere, fovere, probare non dedignaris, ut, dum hujus ſublimiſſimæ Scientiæ ſtudia tibi in pretio, & deliciis eſſe demonſtras, eadem à calumniis, & detractionibus malè feriatorum hominum tua vindices auctoritate, eorumque cultum, univerſæ Reipublicæ adeò profuturum, tuo et exemplo commendes, & præſidio confirmes. Vale.

AD

AD EUNDEM
SERENISSIMUM
PRINCIPEM
PRIORIS EDITIONIS NUNCUPATIO.

I Liber, Etrusci quà te Spes Altera Regni,
Et MEDICUM Stirpis Gloria GASTO vocat.
Sive illum invenias, Naturæ arcana moventem,
Complecti veteres mente, novosque Sophos,
Sive Syracusii, Pergæive arte Magistri
Conica regali ducere signa manu,
Seu Divina Sacræ versantem Dogmata Legis,
Et Fidei fastos, ac monumenta Patrum,
Magni Animi Genium pro me venerare, meique
Obsequii per te Pignus habere jube.
Hinc memora, ut discant quadrato limite claudi
Cyclus, & excessus Sectio nomen habens,
Implicet innumeras quamvis mensura figuras,
Non definitis significanda notis.
Idem Æquus Judex, Mœcenas Optimus idem
Lecto operi laudem, Præsidiumque dabit
Ejus & Auspiciis tibi mox sperare licebit,
Et Famam, & quidquid non tuus Auctor habet.

Ibis

Ibis ab invidiæ saltem discrimine purus,
Nec, Tanto illustris Nomine, vilis eris,
Nam licèt hæc tractes, quæ vulgo incognita risum,
Contemptumue rudi à plebe referre solent,
Atque aliquis te Rhetoricas quadrare Figuras,
In primo frontis limine, crediderit,
Tanta sciendarum tenet ignorantia rerum
Quos apinæ, & tricæ pascere sæpe solent!
Cum tamen à Magno te quis GASTONE probari
Audiet, aut tantùm promervisse legi,
Nonnihil abiecto sub cortice inesse putabit,
Et Pretium Tanti Principis addet Amor.

TY-

Typographus Lectori.

Ab Auctoris Amico nonnulla collecta fuerant Clarissimorum Virorum honorifica Testimonia, quæ ut pridèm edita opera Mathematica Patris Grandi, tanquam profundissima, & maximè ingeniosa, summoque cum Legentium fructu evoluenda, eximiè celebrant; ita hoc ipsum Opusculum Geometricum, velut dignum ejusdem Mentis fœtum opportunè commendassent. Sed, renuente Auctoris modestia, ut quidpiam in ejus Laudem, vel ex Actis Lypsiensibus, vel ex Ephemeridibus Parisiensium, aut Trevoltiensium, vel ex aliis Celeberrimis Mathematicis, Italis, Gallis, Anglis, Germanis, qui tùm in Operibus editis, tùm in Epistolis ad Varios scriptis, ejus cum Elogio meminerunt, hoc loco exscriberetur, ejus jussibus obsequendum, ejusque genio indulgendum fuit. Quia tamen in ejusdem Amici manus Exemplar venerat elegantium Carminum, quæ Vir pius, & claræ Memoriæ Pater Franciscus Adami, in Geometricis, & Algebraicis studiis apprimè versatus, ad ipsum Auctorem nostrum de hoc Opusculo scripserat, eadem nullatenus prætermittenda esse duxit, atque hic omnino, cum bona Auctoris nostri venia, inserenda jussit. Occasio ipsa scribendi hæc fuit. Miserat Auctor eidem Patri Adamo Anno 1703. Libellum hunc suum de Circuli, & Hyperbolæ Quadratura per infinitas Hyperbolas, & Parabolas, meis Typis tunc editum; addita hac Epigraphe Catulliana, quæ in nomine *Adami* luderet:

Cui dono lepidum novum Libellum?
Primo nempe Hominum, Patrumque Primo.

Statim itaq. perlecto avidissimè ex more Libro, P. Adamus sequenti Ode respondit.

ADMODUM REVERENDO PATRI D. GUIDONI GRANDO

Monacho Camaldulensi, Fr. Franciscus Antonius Adamius Minorita. S. P. D.

Geometrarum Maxime, Maxime
Guido Sophorum, Maxime Rhetorum,
Ter maximum jam promereris,
Nec satis est tibi GRANDE nomen

Unius & Trini hoc Decus unicè,
Sed qui suis dat se, & sua, nec minor
Evadit hac nil diminutus,
Te voluit decorare Laude.

Hic cuncta rerum scire recondita,
Hic Scita scito promere famine,
Metiri hic Immensum, deditque
Innumeras numerare partes.

Æquare curvos hic quoque fornices,
Hic & quadratos reddere Circulos,
Interminatum terminare,
Rectificare dedit retortum.

In se stupendum Conica sectio
Quidquid recondit, quidquid & omnibus
Secantium infinitus Ordo,
Iste tibi referat Magister.

Novum Libellum *nunc* lepidum *mihi*,
Qui mille miras tractat Hyperbolas:
Fideque salva Veritatis
Mille docet Paradoxa, donas.

At quòd Virorum *me simul*, & Patrum
Primum *vocaris*, *fallit Hyperbole*.
Ne fallat, id tam grande sumo
Nomen ego, Tibi rem relinquo.

Nunc pro recepto munere gratias
Referre grati Pectoris impedit
Durare Vinclum semper optans,
Ergo habeo, nisi reddo grates.

Vale. Fivizzani. Tertio Kal. Augusti 1703.

AD

AD LECTOREM

PRÆFATIO.

EX omnibus Conicis Sectionibus curva aliqua circumseptis solam Parabolen, Magni Archimedis industria, ad quadratos, seu rectilineos fines redactam accepimus, idque duplici via, quarum postremam jure meritoque inscriberes *Quadraturā Parabolæ per Infinita Triangula*, eò siquidem rem deducit Divinus ille Geometra, ut Parabolicum spatium infinitæ seriei Triangulorum in quadrupla ratione decrescentium æquale demonstret, adeòque maximi inscripti epitritum renunciet. Iisdem ego vestigiis insistens analogiam hanc promovere, & ad sectiones alias exporrigere olim decreveram, *Hyperbolæ quidem per infinitas Parabolas, Circuli verò per infinitas Hyperbolas Quadraturam* brevi libello complexus, cui jam deservientes tabulæ primæ figuras, ad priorem editionem, ære incisas habebam, omniaque prælo parata, ac penè commissa reliqueram. Cùm ecce apud Amicum optimum Celeberrimi viri Nic. Mercatoris Logarithmotechniam offendo, meamque de Hyperbola ad infinitas parabolas traducenda cogitationem, quam mihi primò illuxisse credideram, jamque apud amicos invulgaveram, & in qua præcipuum libelli illius nervum constitueram, ab illo jam præoccupatam invenio; meæ itaque nativitatis moras incusans, de Libelli illius editione ferè despeveram; Amicis nihilominus aliud suadentibus, & methodi, qua hæc demostraveram, abolitionem penitus non ferentibus, cedendum duxi, actum tamen agere ne viderer, quod tum mihi palmarium fuerat, & principem libelli locum obtinebat, velut minùs præcipuum habere, & tamquam vulgatum, è sua sede in calcem libri detrudere coactus fui (quâ non servati in prima editione incisarum jam figurarum ordinis causam habes) & præterquàm quod preoccupatæ jam Hyperbolicę Quadraturæ per infinitas Parabolas loco aliam mihi propriã, & in Hugenianis præindicatam substitui ope simplicis Tractorię facillimè exequendã, (quã mihi adhuc integrã manere tunc arbitrabar sed in Actis Lypsię 1693. mox indicatã inveni) nova rursus accessione utramq. Circuli, & Hyperbole Quadraturã cumulavi, illam etiam ad infinitas Parabolas, hanc pariter ad infinitas Hyperbolas traducens, ut jam utroq. modo utraque Sectio dimensionem qualemcunque subiret, largiori etiam deinceps manu in digressiones profusus, brevemque de Curvarum longitudinibus dimentiendis Appendicem adiiciens, cui in hac editione aliam adhuc benè longam De Transformatione curvarum linearum, & superficierum adjunxi, 20. Theorematibus maximè generalibus comprehensam, præter alia multa ad utriusque Spatii Circularis, & Hyperbolici mensuram, infinitis quibusdam progressionibus concludendam, attinentia, quæ suo loco passim inserui, ut in tam varia rerum segete certior esse possem, aliquid saltem antea non animadversum à me proponi. Quamquàm post tot hujus ęvi acutissimos Geometras in argumento præsertim tandiù, & per tot methodos exculto, difficillimum sit non in easdem penitus cogitationes incidere, præcessoribus nostris communes, nec ullius tritas vestigiis semitas recalcare. Monuit olim Philosophus 1. *Methor. tex. 8. Non semel, nec bis, neque rarò easdem opiniones reverti factas in hominibus, sed infinities.* Delirium hoc ad suam de mundi æternitate sententiam facilè consequens, dempta illa infinitatis exaggeratione, Oraculum erit, cujus veritatem, & in dies experimur, & sera posteritas cumulatissimis exemplis aptiùs confirmabit, quandoquidem tot Veterum Philosophorum sententias hac ætate denuò in lucem assertas videmus, & pro novis propositas, quarum non rudia dùmtaxat specimina, sed expressa lineamenta, inter antiqua dogmata à Plutarcho, Seneca, Aristotele, aliisque relata freqnenter occurrunt, atque integra, ut suspicor, systemata ferè haberemus, nisi illorum philosophica commentaria nobis Antiquitas invidisset. Licèt autem nullum non moveant lapidem Critici, ut Plagiarii notam propterea in ejusmodi Neophilosophos transferant, quasi inventionis gloriam affectaverint: non video tamen quid obstit, quòminùs & absque prævia Veterum idem sentientium notitia, vel animadversione in eas cogitationes Viri Clarissimi per se venire potuerint; nec facilè adducar, ut credam, quæ omnium oculis prostant, nec ullo ipsorum artificio aboleri poterant, inanis, & paucorum hominum respectu ad non ita multos dies victuræ gloriolæ spe, data opera, Prudentes Viros dissimulare studuisse. Utcunque tamen ea res sit, quæ me nullatenus tangit, certum est, res philosophicas diversis hominum sententiis obnoxias esse, atque ut est hominum varium ingenium, diversas plerumque de iisdem Naturæ effectibus opiniones variorum mentibus innasci, eorumque geniis arridere, quarè & difficiliorem esse in his consensum, nisi alius ab alio acceperit, & formam, quam imitaretur, attenderit, unde illud vulgatissimum: *Faciliùs, quàm inter Philosophos, inter Horologia conveniet*. At in Geometricis non facile id modò, sed prorsus necessarium est, & si integræ Mathematicorum diversissimis terrarum locis agentium myriadi (nec enim simul id hominum genus habitare solet, sed hac illac spargi) idem Problema solvendum proposueris, eadem erit, quò ad rem ipsam, omnium solutio, nec fieri poterit, quin multi in methodo, & via solutionis ultrò conveniant; neque alia fortasse causa est, cur plurima in hoc genere à multis præclarissimis Viris, velut nova quandoque edita sint, quæ dudum ab aliis præoccupata jam fuerant.

Nam, ut prætermeam lites innumeras, quæ de Cycloidis inventione & mensura, Italos inter & Gallos, exortę sunt, illis Galilęo, & Torricellio, his autem Mersenno, & Robervallio hanc gloriam tribuentibus: ut omittam celebrem quoque controversiam, de Algebræ perfectione, quam Galli Cartesio, Angli Hariotto, & Oughtredo vindicare conantur; annon inter Gallos Cl. Mathematicus Petrus de Fermat Curvā Geometricam à se uno ante alios rectificatam, Dissertatione peculiari anno 1660. edita, & inter ejus Opera posthuma anno 1679. iterum impressa professus est, cùm tamen jam anno 1657. Guglielmus Neillius in Anglia, atque anno 1659. Heuratius inter Batavos, edita de hoc argumento Epistola Cartesianæ Geometriæ subnexa, idem præstitissent, & quidem in eadem specie Curvæ, hoc est in Parabola cubica secundi ordinis?

Obstupuit Insignis Geometra Vincentius Viviani, cùm illi apud Pappum Alexandrinum *Mathem. Collect. lib.4. prop. 30.* ostendi, portionem sphericæ superficiei, quadam spirali interceptam, exactæ quadraturæ capacem, quippe dati trianguli octuplam demonstratam extare: nam in libello *De Fornicum* *dimensione* Vir Cl. à se primùm portiones curvæ superficiei sphericæ verè quadrabiles assignatas fuisse crediderat. In stuporem pariter adductus esset Guldinus celebris Mathematicus Soc. Jesu, siquis ipsi Regulam suam, de via centri gravitatis, qua ducta in magnitudinem genitricem, prodit quantitas figuræ genitæ, apud eundem Pappum *in fine Præf. lib.* 7. non obscurè indicatam ostendisset. Par admiratio Gregorium à S. Vincentio ejusdem instituti Socium, atque egregium Geometram subire poterat, si præcipuas doctrinas suas de infinitis geometricæ progressionis terminis, & de ductu plani in planum, anno 1647. editas, jam à Torricelio anno 1644. & à Cavallerio anno 1635. præostensas notasset.

Nonnulli vix adducuntur, ut credant, præclarũ illum Poetam, nostrique Pisani Lycei Mathematicum, in Theoremate de momentorum ratione ex ponderum, & distantiarum rationibus composita, cujus inventionis gloriam sibi adscripserat, cum Galilæo, Cavallerio, Antonio Rocca, Torricellio [à quibus id ante traditum, & usurpatum ostendit Vivianus *In Scen. Univers. Proport.*] ultrò consensisse; cùm tamen id, citra ullam plagii suspicionem, eventu facillimum suadeat obvia cuilibet, ex primis, vulgatisque Mechanicæ principiis, dictæ propositionis deductio. Quidsi intelligerent, totum ejusdem Auctoris argumentum *De Resistentia Solidorum*, quod anno 1669. publici juris fecit, jam ante octo annos à D. Blondello præoccupatum fuisse, qui idem Galilæi sphalma de Solido parabolico æqualis ubique resistentiæ, etiam cùm utrinque fulcitur, prior detexit, & subrogato Solido elliptico emendavit? Editus is liber est in quarto apud Franciscum Clousier in Aula palatii juxta ædes Senatus Principis MDCLXI. sub hoc titulo. *F. B. Epistola ad P. VV. In qua famosa Galilæi propositio discutitur, circa naturam lineæ, qua trabes secari debent, ut sint æqualis ubique resistentiæ: & in qua lineam illam, non quidem parabolicam, ut ipse Galilæus arbitratus est, sed ellipticam esse demonstratur*; neque diverso medio [quod magis mireris] nec admodum variis diagrammatum formis utriusque demonstratio procedit. Sed & in libro, Regiis Typis anno 1676. Parisiis edito, cui titulus *Recueil de Plusieurs Traictez de Mathematique*, idem Blondelli Tractatus *pag.* 60. recuditur, & scriptus *Farnæ Veromandorum pridie idus sextiles anni* 1657. indicatur; tum *pag.* 69. alia ejusdem Epistola in idem argumentum data Parisiis 18. Julii 1661. affertur, ubi se fatetur ante duodecim annos [adeoque anno 1649. idest 20. an-

nis

nis ante Mathematici nostri librum] elaborasse volumen de Resistentia solidorum, eique titulum addidisse *Galilaus Promotus* (quod rursus coincidit cum titulo, quem noster Mathematicus libro suo olim præfigendum fuisse *in pref.* monet, *Galilaus ampliatus*) en ipsamet ejus verba, quæ rescribere non piget, ob insigne, quod referunt, Gassendi de Galileo Elogium: *Ayant pour ce sujet composé le livre, que vous avez veu prest à estre donné au public il y a plus de douze ans, que j'appelle* Galilęus Promotus de Resistentia Solidorum, *& qui pouvant quelque jour estre mis en lumiere, fera assez connoistre ma reconnoissance, & le respect, que je porte a la memoire de ce grand homme, que nostre bon Amy M. Gassendi appelloit ordinairement le Platon de nostre Siecle.*

An referam, Celeberrimum Tschyrnhausium *in Actis Lypsiæ 1686.* pro nova Curva areę quadrabilis proposuisse eam, quæ nihil aliud est, quàm Ungula cylindrica expansa, dudum à Vallisio, Fabrio, & Stephano de Angelis considerata: necnon *in Actis anni 1687.* partes Lunulæ Hypocraticæ quadrabiles, velut rem Geometris nondum animadversam, assignasse, & quidem eadem methodo, & constructione, qua D. Artusius De Lionne jam inde ab anno 1654. in sua amœna Curvilineorum contemplatione idem expedierat? An observem, *in iisdem Actis anno* 1700. iterum ut novam adduci eandem partium Lunulæ Hypocraticæ quadraturam à D. Perks propositam in Epistola D. VVallisii ad D. Sloan, cum notis David Gregorii, & Casuelli: eundemque Vallisium jam anno 1670. *in Mechanica part. 2. prop. 31.* sibi tribuisse constructionem Cylindroidis hyperbolicæ per Tornum faciendam, quam præcedenti anno 1669. *in Transactionibus Philosophicis num. 48.* ediderat Christophorus VVren Regiæ Societatis Collega?

An commemorem Mathematicorum nostri sæculi Principem Leibnitzium *In Actis Lypsiæ* 1685. *Mense Novembris* velut novum Lemma vulgasse, quòd centrum gravitatis duorum ponderum, lateribus trianguli, per quæ, medio fune, utcumque trahitur, homologè proportionalium, semper in eadem horizontali basi reperitur, quod jam De Chales, aliique Mechanici notaverant, inprimis verò Torricellius *lib. 1. de Motu gravium prop. 1.* usque ab anno 1644. demonstratum dederat? An notare libeat, quod *anno 1682. eorundem Actorum mense Junio* proposuit idem Leibnitzius, principium naturæ per vias brevissimas operantis, ad legem refractionum applicatum, jam à D. Fermat animadversum fuisse, ut

ex

ex ejus *Operibus Posthumis* anno *1679.* editis *pag.* 156. videre licet? An addam mirabilem Leibnitzii Algorithmum infinitè parvorum, five differentialem Calculum, ab eodem circa annum *1684. in Actis Lypsiæ* propositum, qui vocabulo, & charactere dumtaxat differt a Methodo fluxionum, quam Phenix ingeniorum Isaac Neuuton jam ab anno *1676.* in Anglia proposuerat, reipsa verò penitus eidem congruit, iisdemque regulis subditur, eundemque in omnibus præstat effectum?

An adiiciam Clarissimum Geometram Hospitalium, tum multa suis Operibus, ex Magni Bernoullii, & aliorum penu, inseruisse, tum verò integrum Instrumentum ad multisectionem anguli, per modum Circini, quibusdam mobilibus æqualibus regulis insertis, à Doctiss. P. Thoma Ceva Soc. Jesu dudum excogitatum, atque anno *1695.* peculiari libello expositum, & anno *1699.* inter ejus Opuscula Mathematica recusum, imò & *Actis Lypsiæ 1695. Mense Julii* inditum, eadem forma & constructione, atque usu, nulla primi Auctoris mentione facta, *in Tract. Analytico Sect. Con.* anno 1704. *lib.* 10. *probl.* 6. propositum reliquisse, prout anno 1707. Parisiis editum videre licet *pag.* 452. quo etiam in Opere *lib.* 5. *prop.* 13. & 14. idem modus demonstrandi generatim rationem spatii parabolici, aut hyperbolici cujusvis gradus ad circumscriptum, vel inscriptum parallelogrammum, ex harum curvarum subtangentibus deductus visitur, quo ego in Hugenianis anno 1701. impressis *cap.* 8. *n.* 10. & 11. usus eram?

Quid addam de Cl. Parentio, qui anno 1705. *in Disquis. Phys. & Mathem. p.* 3. *pag.* *479.* generalem complanationem conicæ superficiei rectæ, per comparationem ad suam ichnographiam in proportione lateris coni ad radium basis designavit: id quod ego jam anno *1698.* inveneram, & *1699.* inter Vivianea nostra *in Appendice de Fornicibus Conicis* edideram, ac demonstraveram, nescius idem, sub aliis terminis, *in Actis Lipsiæ 1696.* à D. Joanne Bernoullio, sine demonstratione, indicatum fuisse? Quid de Curvis ex subtangentium ad ordinatas applicatione ortis [quas ego in Hugenianis Correlatas appello] primû à Jacobo Gregorio *in Geometriæ Parte universali* publicè propositis, tum inter Robervallii vetustiora scripta repertis, qua de re ingens inter David Gregorium, & Abbatem Gallois controversia de plagii crimine excitata est, *in Monum. Academiæ Regiæ Scient. Parisf. anni* 1703. enarrata? Quid de Egregio Geometra Bartholomæo Intieri, qui

anno

anno 1704. in suo *Apollonio Promoto*, Parabolas, Hyperbolas, & Ellipses cujusvis gradus ex totidem Conis novarum specierum secare docet, cùm idem Cl. D. De la Hire anno 1685. *in Appendice sui Operis de Sectionibus Conicis* prestitisset, ut Eruditi Lypsienses *loc. cit.* notarunt? Quid de innumeris id genus aliis exemplis, quæ vel meam notitiam, vel attentionem, vel memoriam subterfugiunt, vel consultò dissimulantur?

Cum autè, ut VVallisius *Epist. de Cycloide ad Hugen.* animadvertit, nihil inventionis gloriæ præjudicet, quòd quis se ab aliis præoccupatum deprehendat, quia semper *invenisse Acuminis est*, *primum invenisse Fortunæ*, non erit, opinor, qui hæc à me superiùs notata fuisse suspicetur, ut Clarissimorum Virorum inventis quidpiam propterea detraherem, sed unicè, ut facilem hunc in rebus geometricis Consensum pluribus exemplis confirmarem; quibus certè siquis attenderit, mirari desinet, quòd & ipse in Hugenianis Logisticæ proprietatibus demonstrandis, aut cum D. Carrè (ut Lypsienses notant anno 1706.) aut cum P. Nicolas [ut indicant Parisienses Collectores anno 1707.] convenerim: cui & illud consequens est, ut in eodem argumento tam D. Carre, quam P. Nicolas coinciderint: quàmquàm in methodo demonstrandi, tum illi inter se, tum ipse ab utroque plurimùm distemus, ut nihil, præter argumenti partem, nobis commune videatur.

Sed quid his immoror? Innumera sunt, quæ, rerum geometricarum contemplationi incumbens, per me ipsum inveneram, atque inter Adversaria mea retuleram, quæ postmodum à Clarissimis Mathematicis dudum animadversa, & publico jam consignata fuisse deprehendi, atque hæc, aut prorsus suppressi, aut siqua occasione in lucem asserui, non dissimulavi primorum Auctorum Nomina, iis Inventionis Gloriam deferens, quos par erat sua sorte gaudere, nec imposterum dissimulabo, si tale quid ante mearum speculationum editionem animadvertere contigerit; qui autem me, & mea norunt, non adeò curtam mihi suppetere sciunt rerum ejusmodi supellectilem, ut ex alieno censu quidpiam corradere indigeam; otium, & facultates desunt ad propria edenda, tantum abest, ut ab exterorum laboribus mihi vindicatis gloriam expectem. Erunt alia fortasse, tum in hoc, tum in editis antehac opusculis nostris, vel in postmodum edendis, quæ, vel alii Geometræ prærindicaverint, vel pleniùs fortè illustraverint, neque in his ego palmam ulli aut præripere, aut contendere ausim; quid-

quid

quid ad se pertinere quis putat, ultrò resumat, mihi quam quis voluerit partem relinquat, maximo mihi honori erit vel cum Clarissimis Viris consentisse, & quas ipsi speculationes è secretioribus Analyticæ thesauris eruerint, è communibus propemodum, atque in omnium usum patentibus Geometriæ promptuariis [non tamen ex sola Cavalleriana Indivisibilium methodo, ut Parisienses *loc. cit.* pronunciare ausi sunt, ex sola quorundam diagrammatum specie id suspicantes, sed ex variis methodis, quæ passim diversæ in singulis propemodum capitibus occurrunt, ad legentium utilitatem maximè accomodatis, ut plurium Mathematicorum consensu probare possem] mihi derivasse, rerumque abstrusissimarum facillimas demonstrationes ad omnium captum, & gustum accomodasse.

Ad omnium captum, inquam, ad omnium gustum; nec me tamen latet, nostra a paucis legi, à plerisque autem vel nimiæ obscuritatis insimulari; quod potiori jure in hujus libelli conspectu exclamabunt, si vel analytica signa, vel series illæ infinitæ in oculos incurrent, quibus has paginas non rarò implere coegit Argumenti, quod hic tractamus, natura. Sed spectra sunt hæc trepidantium timore ubi nullus est timor. Quid facilius est, quàm per signum + additionem quantitatis sequentis intelligere, per signum — subtractionem, per notam = æqualitatem, per interpunctionem analogismum, per conjunctionem litterarum ipsarum multiplicationem, per separationem verò, aut interpositionem lineolæ, divisionem? Hæc vel vulgaribus Algebristis satis sunt familiaria: & siquæ alia, præsertim ad calcem libri, nova signa usurpavi, eorum significationem in *Monito pag.* 57. opportunè aperui, & necessitatem, ac convenientiam mutandæ notationis assignavi, cujus ipsamet comparatio cum notationibus eorundem terminorum in priori editione, ad hoc scriptionis genus intelligendũ, plurimùm conferet. At differentialis etiam Calculi characteristicam dx, dy, ejusdemque differentiandi, & summandi modum quandoque inserui; ita est: utinam in præcedentibus etiam opusculis meis inserere potuissem! at tum ejus methodi arcana mihi erant impervia, nunc ejus usu, fructuque perspecto, quidni inter alias mihi familiares methodos & huic locum facerem? Deinde apertissima est notarum ejusmodi significatio, cùm nihil nisi ipsius x vel y differentiam infinitè parvam significent, Calculi autem leges ipsas, si attentè introspexeris, atque hunc Tractatum evolveris, data opportunitate expositas facilè invenies, nisi à Clariss. Hospitalio

in

in Tractatu *De Infinitè Exiguis* illas pleniùs explicante repetere volueris, vel ex Libello nostro nuper edito *De Infinitis Infinitorum, Infinitèque Parvorum gradibus*, ubi ejus methodi fundamenta, quæ ab aliis supponuntur, à nobis demonstrata invenies. Cæterùm pauca occurrent, quæ alia, quàm planæ Geometriæ Elementorum, & nonnulla Conicorum cognitione indigeant; siquæ verò obscuriora manserint, hæc ipsa per saltus transmissa sequentium lectionem, & intelligentiam non morabuntur. Frequentes, quibus indulgeo, digressiones prima vice omittas omnino licebit, ut propositionum ad Quadraturas directè pertinentium filum non abrumpas, secunda autem vice & hisce intelligendis operam non inutilem collocabis, cùm res scitu dignissimas, & Geometriæ non solùm, verùm etiam Philosophiæ promovendæ aptissimas contineant, ut aliquando fortasse apertiùs demonstrabo, nisi Lectores mei persese methodum animadverterint. Quod autem ubique passim precedentia opuscula mea supposuerim, & doctrinarum in illis expositarum vestigiis institerim, id mihi nullo, ut arbitror, vitio verti poterit, jure siquidem Auctori cuilibet permisso usus sum, quo & in sequentibus opusculis uti pergam, ad hunc etiam libellum Lectores meos deinceps amandaturus.

Jam nunc, antequàm manum è tabula retraham, illud accuratè in ipso opusculi limine animadvertendum esse decerno, quas hic proposui, & demonstravi, Circuli & Hyperbolæ Quadraturas, non veluti præcisum illum, & absolutum, definitumque horum spatiorum Tetragonismum me divendere, qualem tanto hactenus studio incassum Geometræ quæsiverunt, quemve irrito, & ridendo conatu Cusani, Bovilli, Orontii, Scaligeri, Portę, Berti, cæterique id genus Scriptores [à Mathematici vocabulo Scientiæ ipsius honor hic abstinere nos jubet] in se susceperunt, nec illo præsertim sęculo expectandus fuerat, cùm Geometrię tot presidia deessent, quæ postmodum à summis Viris ad hujus Scientiæ amplificationem excogitata sunt, quibus adhuc, etsi maximè abstrusę veritates Antecessoribus nostris inaccesę in aperto jam positæ fuerint, complura tamen addenda supersunt, ad hoc ut Quadraturarum negotium numeris omnibus absolutum sperare possimus. Id autem discriminis interest inter has, & Parabolæ Quadraturam ab Archimede per infinita triangula, ut sub initium monebamus, exhibitam, quòd licèt tum nostrę, tum illa Archimedis, per infinitam seriem quadrabilium spatiorum procedant, illa tamen, quum terminis continuè proportionalibus constaret, in unam summam commodè, & expeditè redigi potuit, quę præcisam Parabolæ Quadraturam definiret, nostræ verò non item, sed valores tantummodò quantumvis accuratos, seu in qualitam Hyperbolę, & Circuli Quantitatem ita convergentes, ut differentia infra quamlibet datam continuè extenuetur, prębere possunt, sua quidem facilitate, & generalitatę commodos, in sua specię perfectos, pulcherrimamque horum spatiorum proprietatem aperientes, atque eo nomine minimè contemnendos, ulteriori tamen circa ejusmodi spatiorum dimensionem inquisitioni aditum non precludentes, cui ut incumbant Geometrę, novis scilicet adhuc incompertis methodis Figurarum quadraturas perficiendo, etiam atque etiam hortamur, cùm is demum precipuus Geometrie scopus, hæc meta sit.

Interea, dum non meliora fert ætas, hec damus, *Quę, etiamsi abesset utilitas, propter ipsas demonstrationes dignę sunt, ut recipiantur, multa enim alia in mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, & non ob aliquod aliud recipere consuevimus*, ut inquit Apollonius Pergæus epist. ad Attalum lib. 4. Conicorum prefixa: ut videas à veterum Sapientum doctrina quam longissimè illos recedere, qui nunc temporis geometricarum speculationum inutilitatem damnare solent, atq. hæc studia inter litterariæ Reipublice proceres parciùs colenda suadere conantur, eo prætextu, quòd majoris momenti, quantùm ipsis videtur, inventiones, non Geometris, aut Analystis, sed meris practicis, seu mechanicis debeantur. *Felices artes*, ajebat ille, *si soli de ipsis judicarent artifices!* At plerique, sive ad has profundiores contemplationes obtusius ingenium à natura sortiti, sive perferendi, ad ipsarum penetrationem, laboris pertæsi, cùm tamen se aliquos esse, in omni disciplinarum parte, videri velint, ne quid magnum ex litteraria supellectile sibi deesse, ob huius scientiæ defectum, recognoscant, inter minùs proficuas, aut prorsus inutiles, imò (siqua iis fides) quandoque noxias cognitiones, omnem puræ Geometrie, & Algebræ Methodum recensent: factique cujusdam imaginariæ Reipublicę Dictatores, de optimo Scientiarum gustu, ex ipsorum præjudiciis, sentiendum esse decernunt, ac leges, in addiscendis disciplinis, ex ipsorum præscripto tenendas, audacter pronunciant. Horum errorem dicam, an insaniam, eleganti pariter, ac solida parenhesi confutavit D. Fontanelle *in Præf. hist. Acad. Reg. 1699.* cujus verba huc libenter transferrem, nisi jam longiùs progressus, *Lectorum tedio*

par-

parcendum aliquando judicarem. Compendio dicam: Scientiarum nostrarum utilitas in Disciplinis Artibusque perficiendis se prodit, nam sensibiliũ magnitudinum affectiones, quas vel Physica, vel Astronomia, vel Optica, vel Geographia, vel Nautica, vel Architectonica, vel *Mechanica* respicit, eò faciliùs, & certiùs deteguntur, quò perfectior est Methodus, quaslibet in abstracto quantitatum rationes invicem conferendi, cujusmodi est pura Geometria, vel Analytica, que generalis cujuspiam instrumenti loco Intellectum promovet ad Veritatis inquisitionem: unde Plato *in Philebo* verissimè dixit: *Siquis ab omnibus Artibus segregaret numerandi, dimetiendique, & ponderandi peritiam, vile quiddam esset quod uniuscujusque restaret*. Quodsi manent interim multe Mathematicorum speculationes omni externo fructu vacuæ, ob defectum applicationis ad alias Scientias, quibus inservire poterant, nihil propterea ipsarum pretio decedit, tum quia nudus ipse, & simplex Veritatis fructus, mentem nostram sinceri sui objecti pabulo satis recreat, cujus deliciis siquis assueverit, non frustrà se in iis venandis laborasse arbitrabitur: tum quia non semper fortasse inutilis mansura est quælibet ex his contemplationibus, quas otiosæ Ingeniorum curiositati dumtaxat pascendæ inservire putamus. Apollonii, & Archimedis tempore Conicarum Sectionum proprietates in mera Geometrarum speculatione se continebant, nec ipsarum tangentes, umbilici, proportiones, ad ullum Artium profectum referebantur: mox tamen Balisticam, Opticam, Philosophiam, earum interventu, ad plurima vitæ civilis commoda promotas habemus. Cùm primò de Cycloidis natura, dimensione, & rectificatione ejus curvæ, inter Mathematicos decertatum est, illos ad exercendum, sterili quadam contemplatione, ingenium laborare dixisses, & inutilem operam in dificillimorum Problematum solutione tentanda collocatam ab ipsis pronunciasses; hinc tamen oscillationes horologiorum ad perfectum isochronismum redactas, cum ingenti Astronomiæ, Physicæ, Nauticæ, & Geographiæ incremento, obtinuimus; Cur ergo quaslibet Geometricas, aut Analyticas Speculationes statim, velut omni fructu vacuas, præcipiti judicio damnabimus? Cur Mathematicis Inventionis gloriam invidentes, eam in Artifices, Tignariam, Fabrilem, Fusoriam exercentes, qui ad praxim, & executionem subtilissima illorum inventa deduxerunt, transferemus? Ut largiamur, non esse subscribendum laudati Platonis sententiæ, qui acerbè in Eudoxum Gnidium, & Architam Tarentinum invehitur, quasi *Philoso-*

losophiam prostituissent, ex quò Mathematicas disciplinas ad usum mechanicum traduxerant, quæ propriæ veritatis contemplatione contentæ esse debuerant: nemo tamen in dubium jure vocaverit Pappi Alexandrini doctrinam, qui *præf. in lib.* 8. *Mathem. Collect.* postquàm distinxerat, ex Heronis sententia, alteram Mechanicæ partem rationalem, alteram manuum opera indigere, & illam quidem ex Geometria, & Arithmetica potissimùm constare, concludit: *Eum qui in supradictis Scientiis a prima ætate versatus sit, & prædictas Artes calluerit, quique acri sit ingenio, optimum fore, & Architectum, & Inventorem mechanicorum operum*: adeòut, quòd imperfectas adhuc nostras Artes conspiciamus, ex neglecto ab Artificibus profundioris Geometriæ studio potissimùm pendeat. Sed jam de hac re nimis multa. Vale.

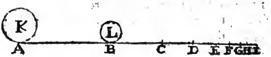
INDEX Eorum, quæ in præsenti editione Operi huic accesserunt.

PARS

PARS PRIOR DE CIRCULO

PROPOSITIO I.

Si ratio magnitudinum AB, BC continuetur in infinitum ad minores terminos CD, DE, EF &c. sitque magnitudo AI



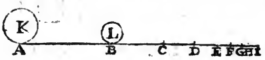
tertia proportionalis post differentiam primæ AB à secunda BC, & ipsam primam magnitudinem AB,

Dico ipsam AI æquari aggregato omnium simul infinitorum terminorum AB, BC, CD, DE &c.

Post Archimedem in postrema Parabolæ quadratura id specialiter de ratione quadrupla ostendentem, Primus, quod sciam, id generaliter notavit, ac demonstravit Torricellius *de dimens. Parab. lemm.* 27. mox Cavallerius *in schol. ejusd. lemm.* hinc Gregorius à Sancto Vincentio, Guarinus, De Chales, aliique variis methodis id comprobantes, quod & nos aliàs fecimus *in Hugenianis cap.* 10. *n.* 3. ut superfluum videri possit hic quidquam ad-

addere, nisi gratam nonnullis futuram sperarem novam hanc physicam rationem, idipsum confirmandi, quam, ob methodi varietatem adjungere non gravabor.

Ex A, & B eodem temporis momento versùs I moveantur duo mobilia K, L, illud quidem velocitate AB, hoc verò velocitate BC; itaque, ob spatia velocitatibus proportionalia, ubi K pervenerit ad B, utique L reperie-



tur in C, eritque mobilium distantia, non jam AB, sed BC secundus terminus progressionis; similiter ubi K progressum fuerit ad C, L pervenerit ad D, ubi illud ad D, hoc ad E, atque ita deinceps, ità ut semper aliquis ex terminis propositæ progressionis intercipiatur inter utrumque mobile, quousque, decrescente infra quamlibet magnitudinem, simul cum ipsis terminis, mobilium distantia, in fine tandem progressionis, utriusque mobilis centrum concurrat. Sit punctum talis concursus I; ergo magnitudo AI erit aggregatum omnium magnitudinum AB, BC, CD &c. & quia eodem tempore mobile K velocitate AB percurrit AI, & mobile L velocitate BC percurrit BI, erit AI ad IB, ut AB ad BC, & per conversionem rationis, ut AI summa omnium terminorum ad primum terminum AB, ita ipse primus terminus AB ad sui excessum supra secundum BC; Quare si ratio magnitudinum &c. Quod erat &c.

SCHOLION.

Ex quò inter utrumque mobile, ante concursum, intercipiatur semper aliquis ex terminis dictæ progressionis, qui multitu-

dine

dine infiniti sunt, deducebat olim Zeno contra Aristotelem, quòd si qualibet continua quantitas in partes minores, ac minores, juxta quamlibet proportionem, in infinitum sectilis esset, numquam Aquila Testudinem, unico licet palmo praeuntem, assequi posset: has philosophicas tricas felici saltu prætergreditur Geometria, imò ex hoc Zenonis paralogismo Theorematis hujus longè jucundissimi demonstrationem derivavit, qua & Philosophos docere queat ipsummet temporis, & loci punctum, in quo Aquila ad Testudinem perveniet, si nempe fiat, ut differentia velocitatum Aquilæ, & Testudinis ad majorem Aquilæ velocitatem, ita primum utriusque intervallum A B ad spatium A I, & ita tempus, quo Aquila conficiet primum intervallum A B, ad aliud tempus, quo Aquila percurret totam A I, & sic Testudinem assequetur; Zenonis enim ratiocinio non conficitur, quòd absolutè numquam Aquila ad Testudinem sit perventura; sed quòd id contingere nequeat infra temporis, ac loci spatium nuper determinatum; Quod enim infiniti sint termini, quid refert? infinita etiam temporis particula, non quidem æquales, sed perinde minores, ac minores in infinitum iis percurrendis insumentur, ex quibus tam non est timenda infiniti temporis aggregatio, quàm ab ipsismet infinitis terminis percurrendis non est infinita spatii longitudo speranda. Vide dicta à nobis in Hugenianis cap. 4. à n. 7.

Observo nihilominus, concipi posse alium casum, in quo Aquila, quantumvis velocior Testudine, hanc revera numquam assequeretur: si nempe supponatur, aut medium in quo fit motus, aut planum, super quo mobile utrumque reptat, resistere motui in ratione velocitatis; ita scilicet, ut momentanea decrementa celeritatum sint proportionalia velocitatibus; quibus actu movetur utrumque, aut (quod in idem redit) proportionalia momentaneis incrementis spatii decursi, ut ostendunt Newton, *Leibnitzius, & Varignonius. Vel etiam, si mobilis utriusque Velocitas in fine cujuslibet termini progressionis A B, B C, C D, D E &c. mutaretur in aliam, eadem proportione cum dictis spatiis decrescentem; spatia quippe velocitatibus proportionalia æquali tem-*

pore transigi deberent, unde infinitæ partes æquales temporis requirerentur ad infinitos illos terminos decurrendos, & sic nec Aquila, nec Testudo ad terminum I pervenire unquam possent, & hæc illam semper præcederet, cui aliquando præivisset, illa hanc numquam tangere, nedum premere posset, ob aliquem dictæ progressionis terminum semper utrique interceptum.

PROPOSITIO II.

AB *eadem prima magnitudine A duæ infinitæ progressiones terminorum continuè proportionalium incipiant, prior A, B, C, D, E &c. posterior A, M, N, P &c.*

Dico, aggregatum ex terminis omnibus prioris ad aggregatum ex omnibus terminis posterioris progressionis esse, ut reciprocè prima differentia posterioris ad primam differentiam prioris seriei.

$$A\,1 \quad B\,\frac{1}{2} \quad C\,\frac{1}{4} \quad D\,\frac{1}{8} \quad E\,\frac{1}{16} \quad F\,\frac{1}{32}\ \&c.$$

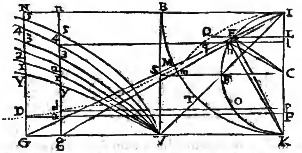
$$A\,1 \quad M\,\frac{1}{3} \quad N\,\frac{1}{9} \quad P\,\frac{1}{27} \quad Q\,\frac{1}{81} \quad R\,\frac{1}{243}\ \&c.$$

EST enim, *ex prop.* 1. series A, B, C, D &c. ad primam magnitudinem A, ut ipsa magnitudo A ad differentiam duarum A, B; ipsa quoque magnitudo A est ad seriem omnium A, M, N, P &c. *per eandem propositionem, & convertendo*, ut differentia duarum A, M, ad magnitudinem A; igitur ex æquo perturbatè, tota series magnitudinum A, B, C, D &c. ad seriem A, M, N, &c. est, ut differentia duarum A, M, ad differentiam duarum A, B. Quod erat &c.

COROLL. Omnes itaque series fractionum ab unitate deinceps proportionalium sunt reciprocè, ut earundem primæ differentiæ, nempe series suprascripta A, B &c. ad seriem A, M &c. est, ut duo trientes ad semissem, sive ad duos quadrantes, nempe ut 4 ad 3; & reipsa prima æquatur 2, secunda æquatur 1 cum semisse, *per tradita cap. 4. Hugenianorum num.* 8. & sic in reliquis.

PROPOSITIO III.

E*Sto semicirculus IFK circa diametrum IK, cujus ab altero extremo in alterius extremi tangentem KG [pro nunc diametro majorem] inclinata IG secet peripheriam in H, unde*

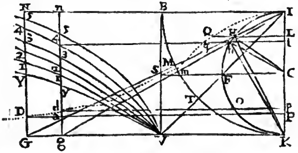


ordinetur sinus HL, fiatque, ut quadratum GK ad quadratum KI, ita ipsa diameter ad YN, & hæc ad 1N, eadem ratione ad infinitos terminos 2N, 3N, 4N &c. propagata.

Dico, summam ex omnibus horum terminorum differentiis alternè sumptis Y1, 23, 45. &c. æqualem esse sinui verso IL intercepti arcus IH.

QUoniam proportionalium differentiæ omnes continuè sumptæ Y1, 12, 23, 34 &c. sunt in eadem, ratione proportionales, eædemque interpolatim acceptæ Y1, 23, 45 &c. iterum continuè proportionales in duplicata priorum ratione, habebimus duplicem seriem proportionalium ab eodem primo termino Y1 incipientium, quare, *per prop. præced.* aggregatum ex omnibus terminis prio-

prioris feriei Y 1, 12, 23, 34 &c. (nempe ipfa YN his omnibus æqualis) ad aggregatum ex terminis omnibus pofterioris feriei Y 1, 23, 45 &c. erit, ut differentia duarum Y 1, 23 ad differentiam duarum Y 1, 12; eft autem differentia duarum Y1, 23 æqualis duabus fimul differentiis Y 1 ab 12, & 12 à 23, igitur ut aggregatum ex duabus differentiis trium continuè proximorum terminorum ad majorem ejufmodi differentiarum, five, ob analogiam



terminorum proportionalium cum fuis differentiis, ut aggregatum ex duobus terminis continuè acceptis ad majorem ipforum, nempe ex conftructione ut duo fimul quadrata GK, KI, vel ut unicum quadratum GI ad quadratum GK, hoc eft ut IG ad GH, propter angulum IHK in femicirculo rectum, ita YN ad dictam feriem; eftque diameter IK ad eandem YN ex hypothefi, ut quadratum GK ad KI, ideft ut GH ad HI; igitur ex æquo perturbatè erit diameter IK ad pofteriorem feriem differentiarum alternè fumptarum Y 1, 23, 45 &c. ut IG ad HI, nempe ut eadem IK ad IL; æqualis eft ergo ejufmodi feries finui verfo IL. Quod erat &c.

COROLL. Quoniam tota GN æquatur toti KI, partes autem Y 1, 23, 45, aliæque deinceps alternatim fumptæ, æquantur IL, manifeftum eft reliquas GY, 12, 34, & his fucſuccedentes in infinitum eodem ordine acceptas æquari reſiduæ L K.

PROPOSITIO IV.

Iiſdem poſitis, ordinetur G D diametro I K parallela, æqualis autem ipſi I L, atque hoc ſemper fiat, quouſque per puncta D, d ſic inventa in qualibet g d *ordinata ad tangentem K G, tranſeat curva* D d *S Q I:*

Dico, ſpatium D d *S Q I K G ad partes G infinitè extenſum duplum eſſe quadrantis I K B, radio I K deſcripti, & ſingulas portiones G D* d g *duplas ſectoris correſpondentis M I* m *iiſdem ſecantibus, à centro ad puncta G, g deductis, intercepti.*

Concipiantur enim duæ ſecantes I G, I *g* fieri infinitè proximæ, uti & duæ ordinatæ G D, *g d*, quomodo ſpatiolum G D *d g* (per demonſtrata *in Tract. de Infin. Infinit. prop. 5. coroll. 3. & 4.*) pro rectangulo ex G D in *g* G haberi poterit, nec arculus per has ſecantes è ſemicirculo interceptus H *b* à recta ejus tangente, vel ſubtenſa ſenſibiliter differet; cùm verò rectangula G I H, *g* I *b* eidem quadrato diametri I K, adeòque & inter ſe ſint æqualia, erit G I ad I *g*, ut I *b* ad I H, & triangula G I *g*, *b* I H, communem angulum I habentia, ſimilia erunt, unde G *g* ad H *b* erit, ut G I ad I *b*, vel ad (minimè comparabiliter differentem) I H, idest ut K I ad I L, vel M I ad G D per conſtructionem; eſt autem H *b* æqualis arcui M *m*. cùm ſint differentiæ arcuum æqualium M K, H *K*, & *m* K, *b* K; igitur eſt G *g* ad M *m*, ut M I ad G D, & rectangulum D G *g*, ideſt ſpatiolum D *d g* G, æquabitur rectangulo I M *m*, ſeu duplo ſectoris I M *m*; quod cùm ubique, & ſemper eveniat, manifeſtum eſt, quodvis ſpatium, per duas ad tangentem *K* G ordinatas ab hac curva reſectum, eſſe duplum ſectoris circuli correſpondentis, necnon totum ſpatium D *d* S Q I *K* G,

ad

ad partes G infinitè protensum, duplum quadrantis IBK, seu quadruplum semicirculi IHK. Quod erat in hac propositione demonstrandum.

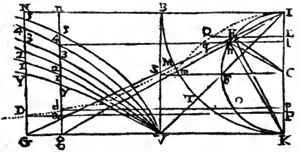
COROLL. I. Bifariam secto angulo BIK per lineam IV pariter bisecantem arcum, & sectorem in T, ordinetur VS: manifestum est, totum spatium infinitè longum DdSVG æquale fore quadranti BIK, utpote duplum sectoris BIT, quemadmodùm & portio VSQIK eidem quadranti æqualis erit, utpotè dupla ipsius TIK.

COROLL. II. Ordinata ad axem IK recta DP, erit segmentum DSQIP quadruplum segmenti KbH, quia, cùm sit GK ad KI, ut HL ad IL, seu GD, rectangulum KGDP æquale erit rectangulo ex IK in HL, sive duplum erit trianguli KHI, spatium autem GDSQIK duplum est sectoris MIK, *per hanc prop.* residuum ergo spatium DSQIP duplum erit residui semisegmenti MHK, sive quadruplum segmenti KbH, vel (si junctam fingas IO) quadruplum æqualis segmenti IHO, nam PK æqualis DG æquatur ipsi IL, & HL æquatur OP, & arcus IH ipsi KO.

COROLL. III. Unde constat, quòd solidum ex spatio DSQIKG, ad partes G infinitè longo, circa asymptoton KG revoluto, æquale est duobus annulis à semicirculo KFI, circa eandem KG revoluto, progenitis, nam rectangulum GDPK ostensum est æquale IK in HL, vel OP, idest æquale duobus OPK, OPI rectangulis, quarè cylindrica superficies, à recta DP genita in primo solido, æquabitur duabus cylindricis superficiebus ab OP circa GK revoluta, & ab eadem OP circa BI rotata descriptis, sive solidum illud infinitè longum, ex DSQIKG circa KG, æquabitur annulo ex semicirculo IFK circa GK, & annulo ex eodem circa BI, sive duobus annulis, ab ipso circa eandem GK rotato progenitis, vel ei, quod, integro circulo radii GK circa tangentem KG revoluto, describeretur, solido annulari.

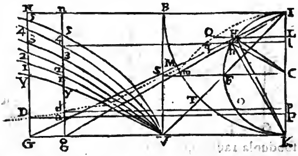
CO-

COROLL. IV. Hinc si ordinata DP bisecet radium in P, erit in ipsa DP centrum gravitatis spatii totius infinitè longi, diametro, asymptoto, & curva ISD comprehensi, nam ejus centri gravitatis distantia ab asymptoto debet



esse subdupla radii, quo distat C centrum gravitatis circuli ab eadem asymptoto, utì hic circulus æqualis est quadranti radio BI descripto, adeòque subduplus spatii DSIKG ad partes G infinitè protensi, cùm debeant, *per Coroll. praced.* sua rotatione circa asymptoton solida æqualia producere, in solidis autem æqualibus oporteat, genitrices figuras centrorum gravitatis ab axe motus distantiis reciprocè proportionales esse, cùm solidorum ratio componatur rationibus figurarum genitricum, & distantiarum centri gravitatis earumdem, ex regula P. Guldini, quam *Hugenianorum cap. XI. n.* 1. citavimus.

COROLL. V. Si aliquam ex Curvis per V transeuntibus, velut V 44. concipias esse Hyperbolam Apollonianam, asymptotis BI, IC descriptam, erit, ut spatium, recta VB, asymptoto BN, & curva hyperbolica V44 infinitè protensa interjectum, ad quadratum VBIK, ita solidum, ex spatio DSQIKG ad partes G infinitè longo, circa ipsam IPK rotato, ad cylindrum ex quadrato VBI, & portio ex dicto spatio hyperbolico versùs partes V re-secta per ordinatam in puncto L asymptoto IN parallelam, erit ad æquè altum rectangulum VKL, ut solidum ex DSQIP circa IP, ad cylindrum à rectangulo BIP circa eandem IP revoluto progenitum; cùm sit enim quadratum GI ad quadratum IK, ut GI ad IH, vel *K* I ad IL,



sive ut ordinata per L ad Hyperbolam, ipsi V*K* parallela, ad V*K*, erit dividendo, ut excessus dictæ ordinatæ supra V *K* ad ipsam VK, ita quadratum GK ad quadratum diametri, vel circulus DP ad circulum BI, unde methodo indivisibilium constat propositum; simulque patet, spatium integrum DQIKG, ad partes G infinitè quidem longum, sed finitę tamen dimensionis, rotatione sua circa IK solidum producere verè infinitum, etiamsi per unicum ex minutis decimis dumtaxat converti intelligeretur; quomodo patet veritas penultimi ex illis paradoxis, quæ *in præfatione Vivianeorum Problematum pag.* 2. dudum proposui, cujusque exemplum non nemo questus erat apud Geometras desiderari, de superficie scilicet finita, quæ si tantillum moveatur solidum procreet verè infinitum: quamquàm id ostendi facilè potest locum habere & in hyperbolarum speciebus infinitis, qua parte determinatæ sunt quantitatis, si circa eam, quæ applicatis parallela est, asymptoton convertantur, itemq. in Cissoide circa diametrum circuli genitoris revoluta, &c. CO-

COROLL. VI. Quoniam oſtenſum eſt, Gg differentiam tangentis GK ad Hb differentiam arcus IH eſſe, ut KI ad IL, additis utrobique æqualibus rationibus, Hb ad Ll, & CH ad HL, conficietur ratio Gg ad Ll [differentiam ordinatarum DG] æqualis compoſitæ ex KI ad IL, & HC ad HL, ideſt ut dimidium quadrati IK (quod eſt rectangulum ex IK in radium HC) ad rectangulum HLI, ſive ut quadratum radii HC ad triangulum HIL, ita Gg, ſeu Da, ad differentiam ordinatarum GD, nempe ad da, adeòque & ſubtangens curvę Dd, in aſymptoto accepta, ad ordinatam GD in eadem ratione erit, juxta methodum calculi differentialis, quam aliàs demonſtravimus *in Tract. De Infinitis Infinitor. &c. prop. 5. Coroll. 2.* quapropter illa ſubtangens erit tertia proportionalis poſt duplam HL & diametrum IK, ſive æquabitur portioni tangentis ſemicirculum in H, quæ interciperetur utraque ad extrema diametri tangente KG, IB: quod aliquando adnotaſſe profuerit.

SCHOLION I.

Quoniam, tangentis hujus Curvæ incidit mentio, non ingratum Lectoribus meis futurum arbitror, ſi paululum ab inſtituto digrediens generalem methodum inſeram determinandæ tangentis Infinitarum Curvarum ſimilem deſcriptionem ſuſcipientium, ut enim in hac Curva ordinatæ GD, KI reciprocè proportionantur quadratis ramorum KΓ, *IG ab eodem fixo puncto I ad eadem axis puncta eductorum, ſic ubi ordinatarum poteſtates quælibet ab exponente* n *indicata vel directè, vel reciprocè proportionarentur ramorum poteſtatibus per exponentem* m *denominatis, putà ſi ordinatę GD forent directè, aut reciprocè, ut ramorum cubi, aut biquadrata &c. ſive in ratione quantumvis multiplicata, aut ſubmultiplicata rationis ipſorum, infinitæ Curvæ DSI orirentur, in quarum cenſum etiam Sectiones Conicæ*

Hyperbola, & Parabola venirent, generali æquatione, quæ in (A) exprimitur, comprehensa [posita nempe constanti I K = a, G K = y, G D = x, et ambiguo signo ∓ obtinente superiorem valorem in directa, inferiorem in reciproca potestatum comparatione] subtangens verò in asymptoto accepta (si hæc ponatur = s)

$$(A) \ldots\ldots \overline{aa \mp yy}^{\frac{m}{2}} = a^{m \mp n} x^{\pm n}$$

$$[B] \ldots\ldots s = \frac{n\,\overline{aa \mp yy}}{m\,y}.$$

$$(C) \ldots\ldots dx = \frac{my\,\overline{aa \mp yy}^{\frac{m-2}{2}}\,dy}{n a^{m \mp n}\, x^{\pm n - 1}}$$

$$(D) \ldots\ldots dx = \frac{m\,y\,x\,dy}{n\,\overline{aa \mp yy}}$$

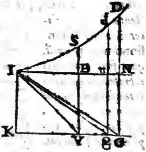
$$[E] \ldots\ldots x = \overline{aa \mp yy}^{\frac{1}{2}}$$

exprimeretur generatim æquatione (B), *hoc est semper foret* $\frac{n}{m}$ *tertia proportionalis post G K, & G I, accipienda quidem supra ordinatam G D in eadem asymptoto G K, ubi fuerit comparatio directa, infra verò talem ordinatam, ubi reciproca; semper enim, cùm relatio Curvæ naturam exprimens invertitur, eadem subtangens transit ad partes contrarias, ut infinitarum parabolarum, & hyperbolarum exemplo, aliisque similibus constare potest. Analyticam hujus determinationis demonstrationem Leibnitzianæ methodo sic breviter habe: differentiando propositam æquationem* (A) *ejusmodi Curvarum, elicitur æquatio* (C) *per regulas* in Tract. de Infinit. Infinit. in Schol. prop. 5. *nuper vulgatas, quæ reducta juxta valores terminorum ab æquatione*

Cur-

Curva desumptos, dat æquationē (D) unde $\frac{xdy}{dx}$ (*valor generalis subtangentis in qualibet imaginabili curva*) *erit in nostro proposito qualis in æquatione superiori* (B) *expressus fuit. Quod erat demonstrandum.*

Itaque in Curva hîc adhibita DSQI, ubi simplices ordinatæ respondent ramorum quadratis reciprocè sumptis, subtangens = $\frac{1}{2}$ *tertia proportionalis post GK, & GI* [*quod coincidit cum determinatione* Coroll. 6. *nuper adducta*]; *si quadrata ordinatarum responderent ramorum cubis, esset subtangens* = $\frac{2}{3}$ *dictæ proportionalis, & sic deinceps. Ubi ordinata ipsis ramis directè proportionales forent, curva ISD tota ultra lineam IN se extenderet, cui & convexitatem obverteret, esset autem nil aliud, quàm hyperbola ordinaria, cujus centrum K, semitransversus axis KI, & huic conjugatus KV; si ordinata directè responderent ramorum quadratis, fieret parabola ordinaria circa axem* KI *supra I productum, cujus latus rectum eadem* K I: *nam superiùs adducta generalis æquatio* [A] *curvarum in primo casu evaderet* (E), *quæ est æquatio ad hyperbolam, quia si IV = VS, & IG = GD, utique hyperbola est æquilatera, propter quadrata* KV, KG, *seu IB, IN, idest ordinatarum ad axem ex punctis curvæ S, D, æqualia differentiis quadratorum SV,* KI, *& GD,* KI; *si verò VS, & GD saltem proportionantur ipsis IV, IG, constat ISD fore hyperbolam per demonstrata à Pappo Alexandrino* Collect. Math. lib. 4. prop. 42. *In casu secundo fieret* ax = aa † yy, *quæ est ad parabolam, quia enim DG ad IK, vel GN est, ut quadratum GI ad quadratum IK, erit dividendo DN ad NG, aut DN*

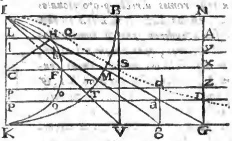


in

in IK ad quadratum IK, ut quadratum GK, seu NI ad idem quadratum IK, ideoque rectangulum ex DN in IK = quadrato IN, quæ est parabolæ proprietas; Itaque tangentes ex hoc generali calculo deductas potes cum Apollonianis constructionibus comparare.

SCHOLION II.

Quando semel aperta est in digressiones via, quid vetat ne in satis obviam de Intensionibus contemplationem divertamur? Summa huc redit, Figuram DSQIKG, in hac propositione consideratam, adhiberi posse pro Scala Intensionum *infinita linea* KG, *per idem irradians punctum I lumine collustrata* (*voco scilicet* Scalam Intensionum *eam figurã, quæ suis ordinatis repræsentat gradus intensionum ejusdẽ illuminationis in punctis, quibus applicantur*) *notum est enim, intensio-*



nem in G *ad intensionem in* K *esse in duplicata ratione distantiarum* KI, IG *reciprocè sumptarum* [*non ea quidem ratione, quam* Opticæ lib. 3. prop. 4. *adducit Cl. De Chales, nam ibi supponitur eadem inclinatio, quæ hic non servatur, atque ibi ad superficiem, hic ad simplicem lineam est illuminatio, sed quia decrescit lumen in* G, *tum ratione distantiæ majoris, adeòque in reciproca ratione* KI *ad* IG, *tum ratione inclinationis radii* IG, *quæ sequitur proportionem sinuum angulorum* IGK, *& ideò ad intensionem perpendicularis incidentiæ* IK *est rursus, ut* IK *ad* IG, *ob latera sinubus oppositorum angulorum proportionalia*] *sed &* IL, *seu* GD *ad* KI *est in duplicata ratione ipsarum*

IK,

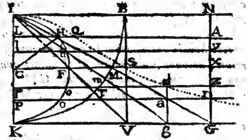
IK, IG, quippe ut HI ad IG, ergo si linea IK repraesentet maximam perpendicularis radii KI in vicinissimo puncto K intensionem, linea GD repraesentabit intensionem puncti G remotioris, ab inclinato radio IG causatam, & sic luminis intensio in infinita linea KG decrescet juxta rationem ordinatarum hujus Curvae, quam ideò Scalam *ejus Intensionis meritò appellamus.*

Hinc nova demonstratione physica confirmari posset aequalitas spatii infinitè longi DdIKG, & cujusvis ejus proportionis, cum duplo quadrantis, aut sectoris correspondentis; cùm enim puncta singula peripheria KMB sint aequè distantia à Luminoso I, & radiis IM perpendiculariter occurrentia, eorum intensio ubilibet exponetur per constantem lineam IK, eritque rectangulum ex ipsa IK in peripheriam KMB, vel quamlibet ejus portionem MT, Scala aequabilis intensionis luminis per ipsam diffusi; sunt autem Scala intensionum [caeteris paribus] ut quantitates Luminis, adeòque, cùm eadem sit Luminis quantitas, scilicet idem radiorum numerus, intra angulum GIV, tangentis portionem GV afficiens, atque illustrans arcum MT (nec non infinitam KG, & totum KMB) consequens erit, Scalas utriusque intensionis aequales esse.

Ecce alterum Exemplum, ut methodus illustretur. Semicirculum IHFK, ejusque diametrum IK illustrent paralleli radii, sive à puncto infinitè dissito provenientes, NI, *AL*, TI, XC, Zp *DP*, GK *&c. manifestum est, omne distantia discrimen evanescere, omnemque adeò intensionis differentiam penes variam inclinationem radiorum desumendam esse, cùmque ad eundem (sive rectum, sive acutum) angulum hi radii diametrum afficiant, non sic verò peripheriam* IHFOK, *erit aequabilis intensionis producta in* IK *Scala rectangulum ex ipsa* IK *in radium, vel sinum anguli constantis, ad quem radios excipit, Scala verò inaequabilis intensionis diffusa per* IHFOK *erit factum ex sinubus* HL, FC, *OP &c. applicatis ad respectiva peripheria puncta* H, F, O, *quippe quibus proportionantur gradus intensionis ab inclinatione angulari radiorum, cui correspondent, producti, cùm-*

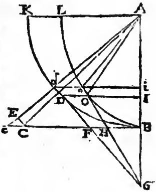
que

quę utraque intensio fit ab eadem radiorum quantitate, erunt prædictæ Scalæ æquales, nec non correspondentes utriusque partes semper æquabuntur, videlicet rectangulum ex radio FC *in* LP *æquabitur facto ex omnibus sinubus* HL, FC, OP *erectis super correspondente arcu* HFO *in cylindrica superficie super ipso erecta: quod apprimè consonat his, quę de Ungulę cylindricę dimensione, tum ab aliis, tum à nobis* in Vivianeis *sunt demonstrata, idque applicari posset cuilibet alteri curvę* KTM, *aut* DSQ *iisdem radiis interpositę, modò ad ipsam curvam erigerentur ubique sinus inclinationis radiorum super tangentes punctorum correspondentium.*



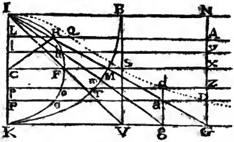
Similiter si iidem radii paralleli NI, XF, DO *totam superficiem hemisphęrii ab* IHF *circa* FC *geniti illustrare intelligatur, scala intensionis habebitur, complanata hemisphęrica superficie (modò* in Vivianeis *tradito* in Scol. prop. 3. *ut scilicet semiperipherię ex sinuum conversione descriptę ordinentur arcui* IHK *in rectam extenso ad puncta correspondentia) erectisque in singulis punctis* H *sinubus* HL, *repræsentantibus gradus intensionum correspondentium, unde quoddam solidum resultabit, cujus naturam facilè concipies, si complanatam figuram sinuum solius quadrantis* IHF *ducas in dictam hemisphęricam superficiem expansam subcontrariè positam, intelligesque ejusmodi solidum æquari cylindro, cujus basis eadem, quę hemisphęrii, & altitudo ęqualis radio* FC, *designanti constantem gradum ęquabilis intensionis resultantis in plano dictę basis hemisphęrii per eosdem radios illustratę.*

Rursus. Concipiatur lumen in A per radios à se divergentes illu-



illustrare sibi oppositam planam superficiem super BC erectam, nec non sibi concentricam sphericam superficiem BDK, quam aquabili intensione ubilibet illuminabit. Cogitemus ergo (lubet enim & hujus methodi specimen tyronibus consultò aperire, & si aliunde minimè necessarium in re satis obvia) luminis conulum scalenum CAc, cujus basis portiuncula infinitè exigua plani illustrati, ellipsis nimirum, cujus majusculus axis Cc, sitque Dd portiŭcula sphericę superficiei prędictę, seu potius circellus infinitè parvus diametri Dd, ejusdem coni lateribus interceptus, cui parallelus alius circulus circa diametrum cE, portiuncula scilicet alterius sphericę superficiei concentrica, eundem coni angulum subtendentis. Erit ergo intensio in Cc ad intensionem in Dd reciprocè, ut circulus diametri Dd ad ellipsim majoris axis Cc, idest in ratione composita ex rationibus, circuli Dd ad circulum cE, & hujus ad dictam ellipsim; quarum rationum prima est eadem, quę quadrati DA, seu AB, ad quadratum AC, secunda eadem, qua cE ad Cc (alter enim ellipseos minor axis aquatur ipsi cE, vel ab eo non nisi infinitè exiguo secundi ordinis intervallo differt) hoc est qua rursus AB ad AC; quarè intensio in Cc ad intensionem in Dd (vel ad aqualem, quę in B) est ut cubus BA ad cubum CA, nempe reciproca cubis distantiarum.

Hoc intellecto supponatur [ut in fig. adversę pag.] lumen I eodem modo irradiare in planum super KG erectum, cùmque sciamus, intensionum gradus reciprocos esse, non jam quadratis, sed cubis distantiarum à puncto luminoso, fiat curva $IQSD$, cujus ordinata GD, VS reciprocę sint cubis VI, GI, eaque circa IK revoluta producatur solidum basis infinita, cujus radius ipsa asymptotus KG, eritque ejusmodi solidum aquale cylindro, cujus



baſis æquetur hemiſphericæ ſuperficiei ex quadrante B I K *genitæ, altitudo verò æqualis radio* I K, *ideſt æquale duplo cylindri ex quadrato* B K, *nam ſolidum illud erit ſcala intenſionis indefiniti plani circularis ex converſione ipſius* K G *progeniti, ille verò cylindrus ſcala æquabilis intenſionis ab eadem radiorum quantitate in hemiſphericam ſuperficiem ex quadrante* K M B *genitam traductæ.*

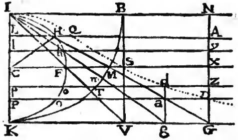
Denique lumen in I *exiſtens irradiet in ſuperficiem ſphericam* I H O K, *erunt intenſiones reciprocè ſimplicibus diſtantiis à luminoſo, nam intenſio in portiuncula* M m *ſuperficiei concentricæ* B K *ad intenſionem portiunculæ* H h *ſuperficiei primò propoſitæ eſt reciprocè, ut extenſio hujus ad extenſionem illius, nempe, ut ellipſis diametri* H h *intra conum luminis* M I m *concluſa ad circulum æqualis diametri* M m *(ſunt enim hæ diametri ipſæ differentiæ æqualium arcuum* H K, M K *) videlicet ut alter axis ejuſdem ellipſeos priori conjugatus ad diametrum* M m, *ſive ut* H I *ad* I M, *quarè etiam intenſio in* K *ad intenſionem in* H *erit, ut* H I *ad* I K, *vel ut* I K *ad* I G, *quarè Scala intenſionis æquabilis ſphericæ ſuperficiei concentricæ* B M K *exiſtente cylindro, baſim habente eandem hemiſphericam ſuperficiem complanatam, & altitudinem radio* I K *æqualem, ſcala intenſionis ſphericæ ſuperficiei* I H K *erit ſolidum proveniens ex hac ipſa ſuperficie in planum redacta, erectis ubique ad puncta* H, h *altitudinibus ſecantium* I G, I g, *atque hoc ſolidum eidem cylindro æquale idcirco probatur, quia ſcalæ intenſionum, cæteris paribus, ſunt ut quantitates luminis, hic vero eadem luminis quantitas, nempe idem radiorum numerus ex angulo* I *in utramque ſuperficiem* I H K, *vel* B T K *diffunditur.*

SCHO-

SCHOLION III.

Habes hic, ut arbitror, quo totum physicomathematicum de Intensione argumentum [aliasque similes materias per methodi imitationem] vel illustrare, vel reformare possis, nec ad arduas Geometriæ veritates scandere ejusmodi scalarum adminiculo tibi inutile fuerit, modò à præcipitiis tibi caveas. Interim verò notare potes, quomodo mutuas sibi manus, ad Veritatem inquirendam, conferant Scientiæ, ipsaque Philosophia Geometriam promovere aliquando possit, gratam illi vicem, ob tot commoda, quibus in dies se ab illa locupletari sentit, officiosè rependens, non modò per considerationem Gravitatis *figuris geometricis tributæ, ut jam inde ab Archimedis tempore invaluit, sed & nunc nova methodo, per considerationem* Lucis, *ac variæ intensionis in linearum, & superficierum illustratione resultantis: nec minùs fortasse ex aliis physicis qualitatibus geometricè expensis sperare licebit, Mathematicos hoc exemplo incitatos Scientiæ nobilissimæ; & jam amplissimæ pomœria novis accessionibus extensuros.*

Cæterùm, occasione hujus Scalæ *intensionis lucis, memini Cl. V. G. G. Leibnitzium in litteris ad me datis Hanoveræ 21. Julii 1705. optimè monuisse, ejus contemplationem cum ipsius gravitatis graduum expositione esse conjunctam; Sic quippe scribit*: Scala intensionum luminis inserviet etiam ad gradus sollicitationum gravitatis: jam olim enim eo modo, quo judicamus illuminari objecta in ratione distantiarum reciproca duplicata, notavi etiam sollicitari gravia à centro, Mathematicè scilicet, seu abstractè rem tractando, & physicas causas seponendo. Atque hinc duxi planetas tali lege ad solem niti, quod etiam (nescio an eodem argumento) Nevvtonio placuit. *Quo posito, animadverti comparationem hanc lucis, & gravitatis ulteriùs extendi posse: ut quia gravitationes super quibusvis planis sunt, cæteris paribus, proportionales sinibus inclinationis eorundem planorum ad perpendiculum*



culum, si intelligatur centrũ graviũ infinitè dissitum à semiperispheria circulari IHFK, ut directiones hinc ad illud tendentes sint parallelæ IN, HA, FX, OD, KG &c sustineatque dicta peripheria IHFK aquam, aliudve fluidum, aut solidum corpus homogeneũ æqualis crassitiei (velut si foret catenula, velũ, aut linteum in eam figuram sinuatum) Scala gravitationum, seu pressionum, quas dicta Curva sustineret, esset figura sinuum HL, FC, OP super arcu HFO ad puncta correspondentia erectorum, dum interim Scala pressionum, seu gravitationum, quas sustineret recta ILPK, dum easdem graves particulas perpendiculariter regeret, esset rectangulum ex radio FC in ipsam ILPK, tum integrè, tum particulatim correspondentes utriusque Scalæ portiones comparando, ut in altero exemplo pag. 15. *adducto de intensione lucis dictum est, & summa gravitationum unius summa gravitationum alterius æqualis colligeretur. Item si in vase hemisphærico, graves particulas continente, gravitationum summa, per imaginem Scalæ ipsam repræsentantis, exquiratur, id obtinebitur, ut in simili exemplo subjuncto* pag. 16. *Quodsi planum* KG *(posito jam centro gravium in puncto I) gravetur æquè alti corporis fluidi, aut solidi incumbentis pressione, Scala gravitationum evadet figura, ex curva DSQI, cujus ordinatæ OG, SV reciprocæ sint cubis directionum in centrum I convergentium VI, GI (ut in simili de intensione lucis diximus* pag. 17. & 18.) *circa axem IK revoluta proveniens, nam ad rationem sinuum inclinationis cum perpendiculis, addetur duplicata ratio reciproca distantiarum, juxta quam in hoc systemate gravitas decrescere in G, & V intelligitur; & si vel maximè interminatum fo-*

ret

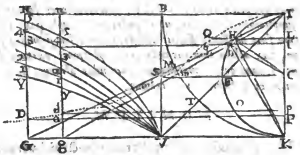
ret planum KG ad partes G, adeoque immenso corpore gravatum, summa nihilominus gravitationum finita foret, ut patet ex ejus Scala, nempe ex dicto solido curva IQD circa IK revoluta, aquali duplo cylindri ex quadrato BK generati, ut ostendimus; & sanè non magis, aut minùs infinitum illud planum ab immenso ejusmodi corpore gravaretur, quàm hemisphaerica superficies ex quadrante BIK producta ab aquè crasso finito corpore sibi incumbente. Si verò incumberet grave fluidum, aut solidum superficiei convexa sphera KOHI, gravitationes forent reciproca simplicibus distantiis, ut in postremo exemplo pag. 18. *observatum fuit de Scala similis illustrationis: sed si omnia persequamur, vix ullum tam jucunda contemplationis exitum inveniremus, itaque eadem methodo perquirendas aliarum figurarum gravitationes Lectoribus remittimus.*

MONITUM.

HUjus Propositionis Corollariis adnecti debuerant supra *ad pag.* 11. quæ inter *Addenda, & Notanda* prioris editionis ad calcem libelli observaveram, nunc verò, & si aliquantò seriùs animadverterim additionem hanc esse faciendam, saltem post Scholia, antequàm ad aliam Propositionem gradum faciam, hoc loco reponenda censui, non sine aliquo auctario, quod præmissorum etiam Scholiorum doctrinam poterit illustrare.

1. Itaque primò observari meretur, quòd etiamsi I*K* non esset ipsis HL, GK normalis, & etiamsi pro semicirculo supponeretur quævis alia figura IHK, & pro quadrante BIK substitueretur figura orta ex ramis IM proportione mediis inter inclinatas IG, & interceptas IH, modò aplicatæ GD ipsi diametro IK parallelæ æquales etiamnum forent abscissis IL, esset spatium figuræ KMBI subduplum totius DQIKG, & quævis portio MIT subdupla partis correspondentis DSVG; Indefinitè enim secta

cta GK in partes æquales minimæ Gg, ductaque Img, erit triangulum GIg ad simile circumscriptum spatio KMI [quod finge esse mIS], ut gI ad tertiam proportionalem Ih, sive ut KI ad Il, vel ng ad gd, aut ut parallelogrammum ngG ad dgG circumscriptum spatio DdSVG, & permutando, ut triangulum GIg ad parallelogrammum ngG (idest semper in subdupla ratione) ita mIS ad dgG; Quare &c.



2. Rotatis etiam NIKG, DQIKG circa KG, erit cylindrus ad solidum, ut triangulum GIK ad spatium HFKI; semper enim triangulum GIg ad simile adiacens lateri IH, quod inscriberetur figuræ HFKI, est ut quadratum GI ad quadratum HI, vel ut circulus progenitus ex radio NG ad circulū radio DG, sive ut cylindrus ex parallelogrammo Ng ad cylindrū solido inscriptum ex parallelogrammo DGg, existentibus tam triangulis GIg, quàm cylindris Ng, invicem æqualibus. Rem, si placet, ad Veterum normam exigito, ego generaliorem Veritatum harum fontem indicasse contentus, exhaurire non curo.

3. Item Corollaria II. & III. Fermè generatim verificantur, manet enim illorum rectangulōrum DPK, & IK in GL æqualitas, & rotundi solidi circa asymptoton cum duplici annulo ex figura KHI circa ipsas NI, KG revoluta genito.

4. Quin

4. Quin illud addo, perpendiculariter erectis ad singula puncta cujusvis curvæ, etiamsi infinitæ, IQSD finibus rectis inclinationum talis curvæ, sive ejus tangentium in iisdem punctis, ad ordinatas QL, SC, DP oriri hinc superficiem æqualem rectangulo sinus totius in axem IP, idemque in qualibet ejus portione verum esse, cùm illa sit scala intensionis lucis, vel gravitationis curvæ, hoc verò intensionis rectæ IK per easdem parallelas NI, DO &c. [juxta dicta in Schol. 2. & 3.] quæ scalæ cùm referant eandem luminis, aut pressionis quantitatem, debent esse æquales; id quod vel hinc geometricè confirmatur, quia Dd ad dn seu pP est, ut sinus totus ad sinum rectum anguli dDn, ergo factum extremorum, nempe sinus recti in elementum curvæ Dd, æquatur facto mediorum, scilicet rectangulo ex sinu toto in pP, atque id semper: quare &c.

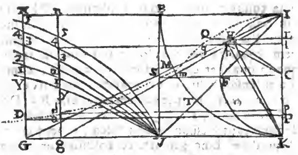
Verùm è nimis longo diverticulo in viam præcipui nostri propositi redeamus.

PROPOSITIO V.

Per punctum V quadrati BIKV inter communes asymptotos BI, IK transeant infinitæ hyperbolæ VyY, V 1, V 2, V 3 &c. quarum ordinatæ ad alteram asymptoton IBN respondeant potestatibus abscissarum à centro I per singulos deinceps pares numeros denominatis, videlicet, ut quadratum NI ad quadratum BI, ita sit BV ad YN, & ut biquadratum NI ad biquadratum BI, ita rursus BV ad 1 N, itemque ut sexta potestas NI ad similem BI, ita BV ad 2 N, atque ita porrò.

Dico, Circulum diametri KI æqualem esse omnibus simul hyperbolicis spatiis YyV, 1, 2, V 3, 4, V 5 &c. idest differentiis alternè sumptis dictarum hyperbolarum.

Manifestum est enim, lineas IK, seu BV, & YN, 1N, 2N, 3N &c. esse continuè proportionales in ratio-



ratione quadrati NI, ad IB, seu G K ad K I, nam ejusmodi posita fuit proportio primę ad secundam, primę verò ad tertiam duplicata, ad quartam triplicata, ad quintam quadruplicata prioris, ob indices potestatum abscissarum, quibus respondent, per eandem binarii differentiam arithmeticè crescentes; ergo *per prop.* 3. erit ubilibet sinus versus IL arcus correspondentis IH, vel ipsamet GD ordinata ad curvam DSQI, de qua *in prop.* 4, æqualis omnibus simul proportionalium ejusmodi differentiis alternè sumptis Y 1, 23, 45 &c. & hoc semper: quarè totum spatium DSVG ex prædicta curva ad partes DG infinitè longum ęquabitur omnibus numero, & longitudine infinitis hyperbolarum differentiis alternis Y y V 1 1, 2 2 V 3 3, 4 4 V 5 5 &c. quarè cùm *per coroll.* 1. *prop.* 4. quadrans BKI, seu Circulus diametri IK, sit æqualis spatio infinitè longo DSVG, æquabitur dictus Circulus propositis hyperbolicis differentiis. Quod erat &c.

COROLL. I. Idem obtinet de partibus, quòd nempe infinitæ portiones ex iisdem supra designatis hyperbolarum differentiis, putà Y y 1 1, 2 2 3 3, 4 4 5 5 &c. æquales sint spatio G g d D, seu duplo sectoris correspondentis M I *m*.

COROLL. II. Cùmque tum integra illa hyperbolica spa-

ſpatia ſint quadrabilia ex generali doctrina, quam dedimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. tum quælibet eorum portiones ſint propterea notæ dimenſionis, erunt & integrorum, & partium differentię noto rectangulo æquales, unde & circuli, & ſectoris cujuslibet quantumvis vero proxima quadratura, & dimenſio geometricè innoteſcet; quod ampliùs ſequenti propoſitione manifeſtum fiet.

PROPOSITIO VI.

Q*Uadrato diametri Circuli exiſtente* = [A], *ſive unitati, ſingulis verò fractionibus* (B), [C], (D), [E] &c. *dividentibus unitatem per omnes impares numeros ſibi ex ordine ſuccedentes, erit ipſe Circulus æqualis infinitæ ſeriei ex ipſis alternatim additis, detractiſque, nimirum* = (A) − (B) + [C] − (D) + [E] − &c.

$$(A)\ 1 = (K)\ \frac{1}{2-1}$$
$$[B]\ \frac{1}{3} = [L]\ \frac{1}{4-1}$$
$$(C)\ \frac{1}{5} = (M)\ \frac{1}{6-1}$$
$$[D]\ \frac{1}{7} = (N)\ \frac{1}{8-1}$$
$$(E)\ \frac{1}{9} = (O)\ \frac{1}{10-1}$$

&c. &c.

$$(H)\ \frac{x}{y-x}$$

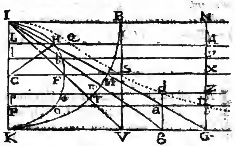
HÆc eſt celeberrima Summi Geometræ Leibnitzii Quadratura, quæ ex poſitis principiis ſic breviſſimè oſtenditur: Per dicta *loco citato Hugenianorum* quodlibet hyperbolicum ſpatium eſt inſcripti rectanguli, ideſt in propoſito quadrati VBIK, talis pars, qualem deſignat fractio (H), exprimente x gradum ordinatarum (qui hìc eſt unitas) & y gradum abſciſsarum (qui eſt quilibet par, 2. 4. 6. 8. &c.) adeòque primum hyperbolicum ſpatium eſt [*K*], ſecundum (L), tertium (M), atque ita deinceps, nempe (A), [B], [C], (D), (E) &c. Circulus ergo, qui *per prop. præced.* æquatur differentiis dictorũ ſpatiorum, poſito quadrato diametri I*K* = 1, fiet æqualis ſeriei (A) − [B] + (C) − (D) + (E) − &c. Quod erat &c.

D SCHO-

SCHOLION I.

$$(P)\ \frac{a^3}{xx+aa} \qquad [R]\ \frac{a^3}{xx} \qquad (S)\ \frac{a^5}{x^4} \qquad [T]\ \frac{a^7}{x^6} \qquad (V)\ \frac{a^9}{x^{10}} \quad \&c.$$

A*Nalyticè id totum sic expediri poterat. Posita diametro IK* = a, *& indeterminata* GK = x, *erit GD ordinata ad curvam DSQI, de qua* in Prop. 4. = [P] *idest per doctrinam expositam* in Hugenianis capite 10. numero 5. *aqualis seriei* (R) − [S] + (T) − [V] + &c. *Sunt autem hę ipsę expressiones ordinatarum ad infinitas hyperbolas, quarum gradus in abscissis crescant juxta numeros pares, ut constat; quęlibet ergo ordinata GD aquivalebit differentiis ordinatarum ad infinitas illas hyperbolas, adeòq; & spatium figura ab hac curva DSQI comprehensum, idest sector circuli correspondens, aquabitur infinitis differentiis pradictarum hyperbolarum, seu differentiis fractionum per impares numeros denominatarum, taxato valore ipsius* aa *pro unitate; Quod est propositum.*



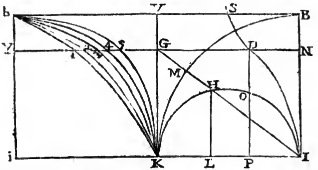
SCHOLION II.

S*Ic instituto meo, Circulum* per Infinitas Hyperbolas *Quadrandi, satisfecisse me arbitror; superest, ut idem* per Infinitas Parabolas *moliri aggrediar; quod tamen longè compendiosiùs exequi dabitur.*

PRO-

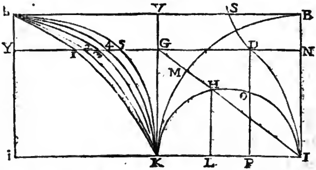
PROPOSITIO VII.

SI fiat, ut quadratum diametri IK ad quadratum tangentis KG (diametro jam minoris) ita ipsa diameter, vel ei aequalis TG ad 1 G, & hae ad 2 G, eadem ratione ad infinitos terminos 3 G, 4 G, 5 G &c. prorogata.



Dico, summam ex omnibus horum terminorum differentiis alternè sumptis T 1, 23, 45 &c. aequalem esse sinui verso IL arcus IH, per secantem IG intercepti.

HOc probabitur, repetendo idem ratiocinium, quod supra, *prop.* 3., adduximus, videlicet. Quoniam proportionalium differentiae omnes continuè sumptae Y 1, 12, 23, 34 &c. sunt in eadem ratione proportionales, eaedemque interpolatim acceptae Y 1, 23, 45 &c. iterum continuè proportionales in duplicata priorum ratione, habebimus duplicem seriem proportionalium ab eodem primo termino Y 1 incipientium, quare *per propos.* 2. aggregatum ex omnibus terminis prioris seriei Y 1, 12, 23, 34 &c., nempe ipsa YG his omnibus aequalis, ad aggregatum ex terminis omnibus, posterioris seriei Y 1, 23, 45 &c. erit, ut differentia duarum Y 1, 23 ad differentiam duarum Y 1, 12; est autem differentia duarum Y 1, 23 æqualis duabus simul differentiis Y 1 ab 12, & 12 à 23, igitur ut aggregatum ex duabus differentiis trium continuè proximorum terminorum ad majorem ejusmodi differentiarum, sive, ob analogiam terminorum proportionalium cum suis differentiis, ut aggregatum ex duobus terminis continuè acceptis ad majorem ipsorum, nempe



ex constructione, ut duo simul quadrata G K, K I, vel ut unicum quadratum G I ad quadratum I K, sive ut G I ad I H, vel K I ad I L, ita Y G ad seriem ejusmodi differentiarum alternè sumptarum; est autem K I æqualis Y G ex hypothesi, igitur & I L prædictis omnibus simul differentiis æquatur. Quod erat &c.

COROLL. I. Eadem constructione facta ad singula puncta G tangentis V K, manifestum est, lineas Y G completuras quadratum V K *i b*, & lineas G 1 trilineum parabolæ quadraticæ *b* 1 K, lineas autem G 2 trilineum parabolæ biquadraticæ *b* 2 K, & lineas G 3 similiter esse ad parabolam quadratocubicam, atque ita deinceps reliquas esse ad altiores parabolas, quarum dignitates V K, G K omnibus ex ordine paribus numeris denominantur: sic enim pro-

prorogatur ad infinitos terminos proportio YG ad 1G, quæ ab initio posita fuit duplicata ipsius VK ad KG.

COROLL. II. Quoniam ergo ordinata GD ad curvam IDS *prop.* 2. descriptam æquatur semper sinui verso correspondenti IL, manifestum est, ipsam quoque GD æquari prædictis proportionalium differentiis alternè sumptis, adeòque & spatium VSDIK æquari spatio parabolico *b* 1 K *i*, & parabolicis lunulis *b* 2 K 3 *b*, *b* 4 K 5 *b* &c.

COROLL. III. Ex quo ubique YG − 1G, † 2G − 3G, † 4G − 5G &c. æquetur ordinatæ GD, constat, etiam *b*V − *b*V, † *b*V − *b*V, † *b*V − *b*V &c. æquari VS, id est eamdem lineam infinities positam, & infinities subtractam relinquere sui medietatem: Id quod etiam ex supradictis *propositione III.* deduci poterat.

* Sed inquies: aggregatum ex infinitis differentiis infinitarum ipsi *b*V æqualium, sive continuè, sive alternè sumptarum, est demum summa ex infinitis nullitatibus, seu o, quomodo ergo quantitatem notabilem aggreget? At repono, eam Infiniti vim agnoscendam, ut etiam quod per se nullum est multiplicando, in aliquid commutet, sicuti finitam magnitudinē dividendo, in nullam degenerare cogit; unde per infinitam Dei Creatoris potentiam omnia ex nihilo facta, omniaque in nihilum redigi posse: neque adeò absurdum esse, quantitatem aliquam, ut ita dicam, creari per infinitam vel multiplicationem, vel additionem ipsius nihili, aut quodvis quantum infinita divisione, aut subductione in nihilum redigi.

SCHOLION.

Duo hoc loco notanda occurrunt: alterum circa priorem partem hujus tertii corollarii, quę sola in prima editione proposita fuerat: alterum circa subjunctæ instantiæ solutionem, quæ post asteriscum adjecta nunc legitur. Quò ad primum, observo

pla-

plurimos Mathematicos non vulgares, qui libellum nostrum legere, expendere, ac comprobare dignati sunt, Corollarii hujus novitate perculsos, atque in summam tam inauditę, inexpectatęque veritatis admirationem adductos fuisse, cùm nihil huic stupendo paradoxo simile in tota Geometria se uspiam legisse testarentur. Ego verò idem rudiori exemplo exponi, ac vulgo etiam persuaderi posse censebam, hoc pacto. Titius, & Mævius fratres, dum Patris hæreditatem inter se ex æquo dividunt, de unico pretiosissimo lapide, immensi valoris, in quo effigies Concordiæ affabrè exsculpta visitur, contendunt. Nefas est vendere, ut pretium inter se distribuere, nam Pater testamento cautum voluit, ne tam raram gemmam à familia alienari posteri sui paterentur; neque alter ab altero illam redimere posset, vel totius hæreditatis cessione: sorti verò ut possessionem tanti thesauri committant, adduci nequeunt. Quid faciendum? Re ad Judicem delata, post multam Jurisconsultorum altercationem, placuit Javoleni sententia, ut alternis diebus in alterutrius musæo incomparabile hoc simulacrum collocaretur; itaque Titius natu major pretiosam effigiem prior obtinuit, mox ab eo ablata, & Mævio concessa est, deinde rursus Titio restituta, iterumque ab hoc ad Mævium translata, atque ita deinceps apud hunc, & illum, & utriusque successores in perpetuum, alternatim mansit, & excidit controversæ gemmæ dominium; unde factum est, ut indivisa manente tam rara effigie, ejus possessio fuerit inter utramque domum dimidiata. En ut eadem quantitas infinities posita, & infinities subtracta æquivalat dimidio sui. Nec difficile fuerit, variato fratrum numero, casus alios fingere, quibus alia hæreditatis portio singulis obtingat, indeque alia paradoxa similis tenoris proponere, quæ pariter, descriptis convenientibus curvis, modo supradicto demonstrarentur.

Quò ad alterum, monendus est Lector, hæc eadem præcisa verba, nullo apice mutato, in meo exemplari, quod primæ editioni obtuleram, jam descripta fuisse: at nonnemo Censoris vicem subiens, cùm nihil aliud in toto opusculo carpendum invenisset, ex hac com-

comparatione, qua ad proposita instantia solutionem usurpatur, materiam critica alicujus sibi oblatam gaudens, me statim convenit, incongruam hanc sibi videri geometricarum rerum ad divina Omnipotentia mysterium explicandam applicationem prætendens: itaque ut potius obiectionem illam, admissa Galilai sententia circa continui compositionem, eludere tentarem, hortabatur; respondendo scilicet, quòd licèt indivisibilia puncta, quorum nulla extensio est, quamdiu multitudine finita supponuntur, nullam extensionem facere possint, tamen, ubi numero infinita sint, quantitatem aliquam componere non prohibentur. Ego verò, qui nec in ea controversia Galilai ductum sequi, nec ejus opinionis me vadem exibere in animo habebam, atque aliunde nec decere, nec expedire arbitrabar, ut cum illo de hac analytici, & theologici argumenti comparatione, longum contentionis filum producerem, quippe non elementaris modo Geometria, sed Analytica, ac Theologia quoq; cognitionē res exigere videbatur: satius duxi totum liberaliter agere, ac tribus transversi calami ductibus obiectionem simul, et responsionem delere, qua scrupulo ansam dederat, cùm ab exiguo hoc paragrapho totam vim, aut elegantiam, vel perfectionem libelli mei non pendere censerem.

Nunc autem, quoniam intelligo eundem hunc Censorem palam jactabundum asseruisse, meam hanc opellam à se emendatam, & castigatam, expuncto majusculo errore, quem ipse mihi indicaverit, & supprimendum monuerit; rem totam, pro ut est (cum bona eorum, quorum interest, venia). Lectorum oculis subiiciendam decrevi, ut Litteraria Respublica judicet, num ego ulla ratione in hoc proposito culpandus essem, qui divina Omnipotentia vim creativem hoc analytico mysterio adumbrare contendebam. (quod & Bernardum Nievventiit in præf. Analyſ. Infinit. *fecisse lego, ubi ait*: Accedit maximi hinc momenti præterea veritatem directè sequi: omne nimirum divisibile, adeoque & omnem quantitatem, vi infinita in nihilum esse reducibilem, eademque vi infinita quantitatem quamcunque ex nihilo produci posse, cùm ex eo productum

esse

esse, in quod divisione resolvi potest, quidlibet meritò censendum sit) *an ipse potens Censor reprehendi jure mereretur, qui tam validum in hostes veræ Fidei telum mihi è manibus excusserit, perinde acsi Cari Lucretii sui, aliorumq; athæorum Philosophorum decantatū axioma* (Ex nihilo nihil, in nihilum nil posse reverti.) *hac nostra observatione labefactari, & oppositum Catholicæ Veritatis dogma stabiliri ægrè ferret, atque tam necessario Religionis nostræ principio confirmationem hanc ex Analytica petitam invideret. Absit quidem, ut de Censoris animo tale quid ipse suspicer, at nec video in verbis meis quid ejus virgam posceret, quid ejus spongiam exigeret. Aut enim doctrina ipsa physica, seu geometrica Corollarii hujus nudè spectatur, aut ejus dumtaxat cum vi creatrice Omnipotentiæ collatio criminationi est obnoxia: si primum, non erat cur me, Galilaana opinionis lubrico, & à paucis admisso; exemplo de infinitudine punctorum lineas componentium, potiusquàm certissimo, & extra controversiam posito argumento creationis rerum omnium ex nihilo, ad eam fulciendam, confirmandamque invitaret: si secundum, ergo similitudines omnes, analogias, symbola, quibus solent, pro modulo nostro, divina mysteria explicari, penitus deinceps amoveri oportebit, ipsaque summi Conditoris Imago nostris animis infixa delenda erit, ne quid humanum, & creatum cum divino, & increato conferre præsumamus. Quod si hanc* Creatoris similitudinem, *nedum non vituperandam, sed optimo jure commendandam fatemur, cur* imaginem Creationis *in hisce analyticis operationibus relucentem non gratè excipiemus? Aut qua magis apposita exempla aliunde venabimur, quibus infirma hominum mentes ad hoc magnum mysterium percipiendum juventur, & contra blasphemas Atheorum cavillationes in ejus fide muniantur, si hac clarissima à Mathematicis petita vel respuimus, vel saltem negligimus? Jam alibi monui* (in præf. Demonstr. Vivianeorum Problem.) *quantùm ad illustrandas superiores Veritates Geometricæ conferant Cognitiones, & ipsiusmet Procli Diadochi testimonio id comprobavi, quod non piget hoc loco repetere.* Theologiæ,

logiæ, *inquit*, intelligentes apprehensiones Mathematica præparat: quæcunque enim imperfectis scrutatu difficilia, arduaque ad veram Divinorum cognitionem videntur, hæc Mathematices rationes credibilia, & manifesta, & certa per imagines ostendunt.

Aliunde igitur, quàm ab hac prætensa libelli mei emendatione, gloriæ suæ materiam bonus Censor quærere studeat, aut certè alios errores indigitet, quos ubi tales esse persuaserit, non sine grati animi erga Monitorem significatione, corrigere conabor: hunc verò tantum abest, ut inter errores censendum agnoverim, ut in publicis physicis prælectionibus meis, quoties de Mundi origine sermo recurrit, post confutatam Materię æternitatem, non alia umquam analogia creationem ipsius captu possibilem ostendere consueverim, quàm ex hisce analyticis, aut arithmeticis operationibus, quæ rem aptissimè illustrare mihi videntur; sic enim habeo De Cęlo, et Mundo lect. 4.

Quicunque ad infinitam Dei virtutem attenderit, nihil ipsi repugnare deprehendet, ut quidvis è nihilo efficiat: quod ut clariùs per quandam analogiam percipiamus, physicam actionem cum arithmetica numerorum efficientia conferre liceat, Auditores humanissimi. Si numerus quidam in alium ducatur, qui ex utriusque multiplicatione resultat, productus ab iisdem factoribus, seu coefficientibus, dicitur: sic ternarius quaternarium multiplicans duodenarium producit; si verò hic productus per alterutrum factorum dividatur, quotiens resultat alter coefficientium, ex cujus multiplicatione cum altero prodierat, ut si duodenarium per ternarium dividas, quaternarius pro quotiente prodibit, adeout divisio idipsum retexat, quod multiplicatio conficit, & multiplicatio reficiat, quod divisio destruxerat. Hoc animadverso, cogitemus oportet, quemvis numerum eò minorem fieri, quo vicissim per majorem ipse dividitur: sic minor est pars una centesima, quàm decima, & minor millesima, quàm centesima, &c.

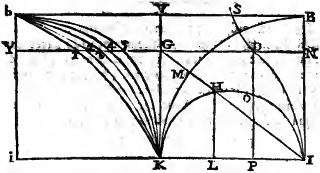
ma, &c. nimirum unitas minor evadit divisa per centenarium, quàm per denarium, & minor adhuc evadit divisa per millenarium, quàm per centenarium (& quidem exactè in reciproca ratione divisorum fractiones decrescunt) adeòut si intelligatur unitas per majorem, ac majorem numerum dividi, ad minorem, & minorem semper quantitatem reducatur; quodsi igitur eam dividi intelligimus per numerum absolutè infinitum, seu majorem quolibet assignabili, fiet ipsa qualibet assignabili magnitudine minor, adeoque ad merum nihil (respectivum scilicet, eo sensu, quo quantitas infinities minor alia, est ad hanc ut o ad 1. *per prop. 3. de Infinit. Infinitor.*) redacta erit, in eoque statu perseverare intelligetur, usquedum per ipsummet infinitum numerum, per quem divisa fuerat, rursus multiplicetur: ut enim unitas per centenarium divisa, si per numerum quemlibet centenario minorem multiplicetur, pristinum unitatis integræ statum non recuperat, sed ad hoc exigit ejusdemmet centenarii multiplicationem: ita ad hoc ut nihil illud, residuum ex divisione unitatis per numerum infinitum, rursus evadat aliquid, debet omnino per eundem infinitum numerum multiplicari, nec numerus infinito minor id unquam præstabit. Manifesta est igitur Infiniti numeri virtus, ut quodlibet per divisionem destruat, & in nihilum redigat, rursusque ut ex nihilo quidlibet restituat, per multiplicationis efficaciam illud producendo. Quo sanè exemplo constat, etiam concipi posse, Dei Opt. Max. infinitam Virtutem eò se extendere, ut quidvis in nihilum redigere, quidvis ex nihilo producere valeat, adeoque per creationem propriè dictam potuisse Mundi hujus aspectabilis materiam è nihili sinu excitare, qua in varias formas deinceps disposita, singulas Mundi partes distinxerit, ornaverit, suisque numeris absolutas, perfectasque reddiderit. *Hac ibi ad hujus mysterii explicationem attuli, eademque ad hoc propositum advocasse sufficiat.*

PRO-

PROPOSITIO VIII.

QUadraturam Circuli prop. *6. propositam*, *iterum per Infinitas Parabolas demonstrare*.

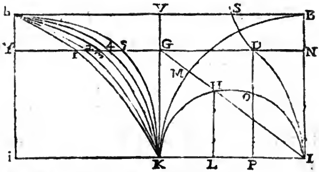
EST enim circulus circa diametrum I *K*, vel quadrans *K* M B I, *per Corol.* 1. *Prop.* 4. æqualis spatio VSDIK, nimirum *per Coroll. Prop.* 7. æqualis *b* 1 K *i*, † *b* 2 K 3 *b*, † *b* 4 K 5 *b*, &c. hoc est quadrato *b i* K V, minùs trilineo



parabolæ *b* 1 K V, plus trilineo secundæ Parabolæ, minùs trilineo tertiæ &c. sunt autem illa trilinea circumscripti quadrati (B), [C], (D), [E] &c. per ordinem, ut patet ex dictis *cap.* 8. *Hugenianorum n.* 10; ergo posito eodem quadrato = 1, prodit circulus = (A) − (B) + [C] − (D) + [E] − &c. Quod erat demonstrandum.

(A) 1
[B] $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{5}$
[D] $\frac{1}{7}$
(E) $\frac{1}{9}$
&c.

COROLL. I. Quoniam parabola *b* 1 *K i* inscriberetur quadranti I B M K, aliæque eundem quadrantem circumplecterentur, patet, excessum quadrantis supra inscriptam parabolam æqualem esse Lunulis parabolicis *b* 2 K 3 *b*,

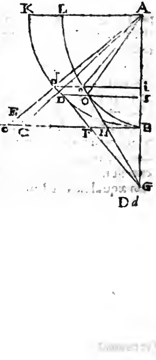


$b\ 4\ K\ 5\ b$ &c. eidem quadranti adſcriptis.

COROLL. II. Nec minùs eadem methodo patet dimenſio cujuſvis ſectoris, putà ejus, cujus ſemiſſis eſſet MIK, quippe foret ille æqualis $y\ 1\ K\ s + 2\ K\ 3 + 4\ K\ 5$ &c. unde patet Veritas Quadraturæ Circularis ſectoris ab eodem Clar. Leibnitzio propoſitæ in Actis Lipſiæ 1691. menſe Aprilis, pro qua & ſequentem Propoſitionem libet adjungere.

PROPOSITIO IX.

Circularis, vel Elliptici Sectoris Quadraturam loco mox laudato à Summo Geometra exhibitam demonſtrare.



Sit radius $AB = 1$, tangens $BC = x$, arcus circuli $BD = y$, ducta infinitè proxima ſecante Ade, cum arcu CE concentrico, ponatur $Dd = dy$, undè $Ce = dx$, ſecans $AC = (Q)$. Jam Dd ad Ce eſt in ratione compoſita ex

(Q)	$\sqrt{1+xx}$		
[F]	$\frac{dx}{1+xx}$		
(G)	$\frac{x^3}{3}$	(A)	1
[H]	$\frac{x^5}{5}$	[B]	$\frac{1}{3}$
(I)	$\frac{x^7}{7}$	(C)	$\frac{1}{5}$
[K]	$\frac{x^9}{9}$	[D]	$\frac{1}{7}$
		(E)	$\frac{1}{9}$

Dd ad EC, ideſt 1 ad [Q], & EC ad Cc, nempe rurſus 1 ad (Q), adeòque eſt ut 1 ad $1+xx$, nempè ut quadratum radii ad quadratum ſecantis; ergo cum ſit $1+xx \,.\, 1 :: dx \,.\, dy$, erit hæc = [F] videlicet per dicta *in Hugenianis cap.* 10. *n.* 5. = differentiæ ſeriei $x-$(G)$+$[H]$-$(I)$+$[K]$-$&c. undè hęc ipſa ſeries = integrę y, & ductâ fingendo tangentem CK, ut interceptus arcus BK ſit duplus BD, & ſector BAK æqualis rectangulo radii in ſemiarcum BD, fiet ejuſmodi ſector = $x-$(G) $+$(H)$-$(I)$+$(*K*)$-$&c. quæ eſt Quadratura Leibnitzii loc. cit.

Et quoniam, ubi ſector BDKA ſit quadrans Circuli, angulus BAC ſemirectus evadit, & tangens BC æquatur radio BA, nempe ipſa $x=1$, tunc ſeries præfata mutatur in hanc ſimpliciorem, videlicet [A]$-$(B)$+$(C)$-$[D] $+$(E)$-$ &c. qualem *prop.* 6. *&* 8. jam demoſtravimus.

Ellipſi autem BOL circa eandem tranſverſam diametrum poſita cum circulo BDK, quia tam ſegmentum BDI ad BOI, quàm triangulum DIA ad OIA, adeòque & ſector BDA ad ſectorem BOA, eſt in ratione DI ad IO, ſeu *K*A, vel BA ad AL, necnon tangentis FB ad BH, utique ſi non jam AB, ſed AL ſit = 1, & AB = a, nec jam BF, ſed BH = x, prodibit idem ſector ellipticus BOA = $ax-a$(G)$+a$(H)$-a$(I)$+a$(K) &c. ut Maximus ævi noſtri Geometra ſæpe citato loco determinavit, noſque demonſtrandum ſuſceperamus.

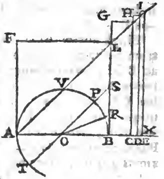
COROLL. Hinc conſtat, quòd, ubi $x=1$, ſeu tangens BH = AL, habetur quadrans ellipſis BLA = BAL rectangulo, minùs ejus triente, plus ejus quinta parte &c. ut in circulo ad circumſcriptum quadratum relato contingit.

SCHO-

SCHOLION.

Restat, ut cùm similem seriem de sectore hyperbolico ibidem Vir Cl. dederit, nos illam demonstrare non differamus, quod post expositas nostras de Hyperbola per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas quadranda cogitationes, præstabimus, ad id nos invitante olim, nostrasque curas promovente Egregio Juvene Gabriele Manfredio, cujus doctissimam hac de re Epistolam tunc in medium adducam, quàm ferax sit Ingeniorum ad Geometriam, & Analysim factorum Italia, locupletissimo apud Exteros testimonio futuram.

Sed prius ostendere aggrediar aliam Circuli Tetragonismum, ex infinita serie quorundam rectangulorum deductum à Celeberrimo Philosopho, & Geometra Renato Des Cartes, quæ post primam nostri hujus libelli editionem, inter ejus Opera posthuma, Amstelodami anno 1704. vulgata fuit pag. 6. Excerptorum ex MSS. *ad calcem Voluminis: eaque sic procedit.*

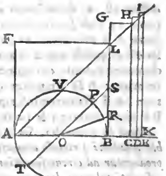


Ad quadrandum circulum, *inquit*, nihil aptius invenio, quàm si dato Quadrato BF adjungatur rectangulum CG, comprehensum sub lineis AC, & CB [*ductum quippe supponit diametrum AL, eamque ulterius productam, ut ob angulum semirectum LAB, singula parallela BL æquentur suis distantiis à puncto A*] quod sit æquale quartæ parti quadrati BF: item rectangulum DH, factum ex lineis DA, DC, æquale quartæ parti præcedentis: & eodem modo rectangulum EI, atque alia infinita, usque ad X, quæ omnia simul æquabuntur tertiæ parti quadrati BF [*nam series quadrupla est sesquitertia primi termini, ut sæpe dictum*

dictum, eſt, ac demonſtratur ab Archimede De Quadr. Parab. prop. 23; *unde ſuperat primum terminum ipſius triente.*] Et hæc linea A X erit diameter circuli, cujus circumferentia æqualis eſt circumferentiæ hujus quadrati B F: eſt autem A C diameter circuli octogono, quadrato B F iſoperimetro, inſcripti: A D diameter circuli inſcripti figuræ 16 laterum, A E diameter inſcripti figuræ 32 laterum, quadrato B F iſoperimetræ; & ſic in infinitum.

Quod ſic demonſtro. Sit B S ſemilatus cujuſvis polygoni (ut hic quadrati) circulo diametri B A circumſcripti, & ſecans S O producatur ad circumferentiam in T; erit S T diameter circuli inſcripti polygono dupli numeri laterum, ut in hoc caſu octogono, iſoperimetro eidem priori polygono: biſariam quippe ſecto angulo S O B per lineam R O, erit utique R B ſemilatus polygoni duplo laterum numero circumſcribentis eundem circulum diametri B A; eſt verò (3. 6. elem.) *S O ad O B, vel O T, ut S R ad R B, & componendo S T ad T O, ut S B ad B R, & ſumptis conſequentium duplis, S T ad T F, ſeu B A, ut S B ad duplam B R, hoc eſt ad integrum latus polygoni (quod nunc erit octogonum) duplo laterum numero circa circulum diametri B A deſcripti; eſt autem S B ſemilatus primi polygoni [nempe hic quadrati] latus integrum polygoni iſoperimetri, duplo laterum numero deſcripti, ut conſtat, nam S B octava pars eſt perimetri quadrati B F, & ſic in aliis proportionaliter, patet ſemilatus octogoni eſſe partem ſextamdecimam ejus perimetri, adeoque æquari lateri integro figuræ iſoperimetræ 16 laterum, &c., ergo S T ad A B eſt, ut latus integrum polygoni duplo laterum numero deſcripti, & iſoperimetri priori polygono, ad latus integrum polygoni duplo laterum numero circumſcribentis circulum diametri A B; quare cùm A B ſit diameter circuli, cui circumſcribitur polygonum dupli laterum numeri, cujus ſemilatus B R, erit etiam S T diameter circuli inſcripti polygono ſimiliter dupli laterum numeri, & iſoperimetri eidem primo polygono; Quod erat demonſtrandum.*

Eſt



Est autem rectangulum T S P æquale quadrato semilateris B S, adeoque æquale quartæ parti quadrati B F, sive, ex Constructione Cartesiana, *æquale rectangulo A C B, & additis utrobique æqualibus quadratis O P, O B; fient quadrata O S, O C æqualia, unde & tota S T æquatur ipsi A C; quare erit A C diameter circuli inscripti octogono isoperimetro quadrato B F.*

Similiter ostendetur A D æqualis diametro circuli inscripti figuræ 16 laterum isoperimetræ octogono præcedenti, adeoque & eidem quadrato B F, eo quòd A D C æquetur quartæ parti rectanguli A C B; seu A S P, vel quadrati B S, à latere prædicti octogoni isoperimetri descripti, adeoque A D C æquetur quadrato dimidiæ B S, unde facto super A C semicirculo inscripto octogono lateris B S, & ad ejus lateris bisectionem ducta ex centro secante, usque ad perispheriam extensa, ostendetur hæc = A D, ut prius ostensa est S T = A C.

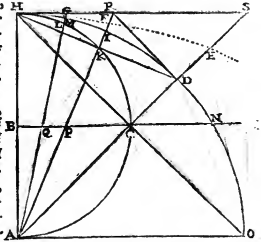
Eodem modo erit A E diameter circuli inscripti polygono 32 laterum, prioribus isoperimetri; & sic procedendo habebitur ulterius diameter polygoni isoperimetri laterum 64, mox 128, & sic in infinitum; neque invenietur terminus X hujus progressionis, nisi ubi fuerit demum A X æqualis diametro circuli inscripti polygono infinitorum laterum, isoperimetro eidem quadrato B F; hujusmodi verò polygonum infiniti-laterum est ipsemet circulus; ergo A X est diameter circuli isoperimetri eidem quadrato B F.

Et quia ex Galilæo, Dial. 1. de nov. Scien. *Circulus est medius proportionalis inter polygonum sibi circumscriptum, & aliud simile ipsi isoperimetrum, erit circulus diametri* A X *medio loco proportionalis inter quadratum sibi circumscriptum, latere videlicet A* X *describendum, & quadratum ipsum sibi isoperimetrum B F, cujus latus B A; sive sumpta media proportionali*

inter

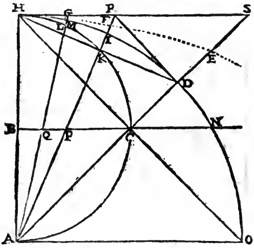
inter AX, AB, erit hæc latus quadrati æqualis circulo diametri AX, & absoluta erit circuli Quadratura; Sed in determinatione lineæ AX tota superest difficultas, huic enim in infinitum appropinquare licet, sed non penitus attingere illius terminum X ex communi Geometria dubitur.

Nescio autem, an & aliam, circuli quadrandi rationem, quæ nunc mihi menti obversatur, hac occasione proponã. Sit semicirculus HCA, & per ejus centrũ B ducta linea BN ad diametrum AH perpendiculari, describatur polo A, regula BN, intervallo BH Conchois Nicomedea HGFE: item centro A, radio AH quadrans circuli HMDO: sitque angulus HAC semirectus, quem bifariam dividat recta AK, & residuum KAH, item bifariam secet recta AL, & sic deinceps.



Erit quadratum inscriptum circulo ad circulum, in ratione composita ex AC ad AD, AK ad AI, AL ad AM, & sic deinceps ex aliis chordis bisecantibus residuos angulos, ad radios circuli AD; Circulus verò ad quadratum circumscriptum erit in ratione composita ex AD ad AE, AI ad AF, AM ad AG, & sic deinceps ex aliis radiis bisecantibus residuos angulos, ad correspondentes ramos Conchoidis: quæ rationes componentes, post aliquas bisectiones, ferè in rationem æqualitatis degenerant: id autem sic ostenditur.

Nam si jungantur HCO, HKD, erit triangulum HCA ad triangulum HDA, ut AC ad AD: similiter juncta recta HLI, erit triangulum HKA ad triangulum HAI, ut AK ad AI: necnon ostendetur triangulum HAL ad triangulum HAM, ut AL ad AM, & sic semper; Erit autem triangulum HAC octava



pars quadrati inscripti circulo HDO, sicut triangulum HDA octava pars octogoni eidem circulo inscripti; at triangulum HKA erit sextadecima pars ejusdem octogoni, ut trianguli HIA sextadecima pars est figuræ 16. laterum eidem circulo inscriptæ; triangulum autem HLA ejusdem figuræ 16 laterum pars trigesima secunda foret, idest præcisè, quota pars esset triangulum HMA figuræ 32 laterum eidem circulo inscriptæ; Quare polygonorum in circulo HDO descriptorum, erit quadratum ad octogonum, ut AC ad AD, octogonum ad figuram 16 laterum, ut KA ad AI, & figura 16 laterum ad figuram laterum 32, ut LA ad AM; Ratio igitur inscripti quadrati ad circulum, qua componitur ex ratione quadrati ad octogonum, & hujus ad figuram 16 laterum, & hujus adhuc ad figuram laterum 32, & sic deinceps usque ad figuram infinitorum laterum, cujusmodi est ipse circulus, composita erit ex rationibus CA ad AD, KA ad AI, LA ad AM, & sic in infinitum.

Pari-

Pariter, cùm sit triangulum HAS octava pars Quadrati circumscripti circulo HDO, & quadrilaterum HRDA, cujus diameter AR bisecat angulum HAS, sit pariter octava pars circumscripti octogoni, erit quadratum ad octogonum, ut triangulum HAS ad quadrilaterum HRDA, idest ut SH ad duplam HR, vel ut SA † AH ad duplam AH, sive ut dimidia SA † dimidia AH, ad AH, nempe ut AC † CE, sive ut AE, ad AD; & sic eadem ratione ostendetur esse circumscriptum octogonum ad circumscriptam figuram 16 laterum, ut FA ad AI, & figuram laterum 16 ad figuram laterum 32, ut GA ad AM, & sic semper; quare circumscriptum quadratum erit ad circulum in ratione composita EA ad AD, FA ad AI, GA ad AM &c, utpotè in ratione composita quadrati ad octogonum, hujus ad figuram 16 laterum, hujus ad figuram laterum 32, & sic deinceps usque ad ipsum circulum, qui est figura infinitorum laterum. Quod erat demonstrandum.

Hinc patet, rationem ex EA, ad AC, & FA ad AK, & GA ad AL, & cæteris deinceps ramis conchoidis ad chordas semicirculi, compositam, æquari rationi duplæ, qualis est circumscripti quadrati ad inscriptum eidem circulo.

Obiter hinc colligi potest novus modus, Conchoidem describendi, si nempe secantium AIR, ADS excessus IR, DS supra radios AI, AD, bifariam secentur in F, E, linea quippe incedens per puncta E, F, H erit ipsa Conchois Nicomedea: nam quia PR est medietas ipsius AR, si etiam RF sit medietas ipsius RI, utique residua PF erit medietas residuæ AI, hoc est æquabitur ipsi BH: eodem modo ostendetur etiam CE æqualis eidem BH, ergo curva HFE est Conchois, regula BN, intervallo BH descripta.

Hæc autem præsenti Scholio inserere visum fuit, licèt digna videri possent, quæ inter Propositiones recenserentur, ne ipsarum numerum, sæpe in operibus nostris citatum, augerem, ordinemque turbarem, ut editionis utriusque methodo, & dispositioni citationes omnes corresponderent.

EPIDOSIS.

Antequàm ad alteram Libelli partem progrediar, opportunum duxi, aliàs vacaturum hujus pagellæ residuum implere, adducta demonstratione veritatis supra enunciatæ *pag.* 10. *ad finem*, de Solido Infinito ex Cissoide circa diametrum circuli genitoris revoluta: hoc enim, nullo schemmate adhibito (quæ methodi Leibnitzianæ præstantia est) ex sola hujus curvæ natura demonstrare possum,

[A] $\frac{cxx}{a}$,	[B] $\frac{cx^3}{aa-xa}$,	[C] $\frac{cx^3dx}{aa-xa}$
(D) $\frac{cx^3dx}{aa}$,	(L) $\frac{cx^4}{4aa}$,	(O) $\frac{caa}{4}$
[E] $\frac{cx^4dx}{a^3}$,	[M] $\frac{cx^5}{5a^3}$,	[P] $\frac{caa}{5}$
(F) $\frac{cx^5dx}{a^4}$,	(N) $\frac{cx^6}{6a^4}$,	(Q) $\frac{caa}{6}$
&c.	&c.	&c.

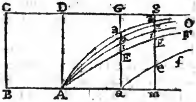
posita scilicet diametro $= a$, parte abscissa ab initio Cissoidis $= x$, & circumferentia genitoris circuli $= c$; erit enim $a - x$ ad x, ut (A) (nempe circulus radii x) ad [B] = circulo descripto ab ordinata Cissoidis, quo ducto in dx, prodit (C) elementum solidi ab ejusmodi revolutione producti, & hoc resoluto in seriem infinitam *per cap.* 10. *n.* 5. *Hug.* habetur [D] † [E] † [F] &c. cujus integrale [L] † [M] † [N] &c. = solido altitudinis x; & ubi $x = a$, fit integrum solidum [O] † [P] † (Q) &c. = Infinito, ob denominatores arithmeticè dispositos.

PARS

PARS ALTERA DE HYPERBOLA.

PROPOSITIO X.

Inter asymptotos BCG per idem punctum A descripta sint infinita Hyperbola AEF prima, seu linearis ab Apollonio illustrata, A 1 1 secunda, seu quadratica, qua Cl. Viviano Mesolabica dicebatur, A 2 2 tertia, seu cubica, A 3 3 biquadratica, aliaque altiorum graduum in infinitum, quas secet alteri asymptoto parallela E 1 2 3 G.



Dico ipsas AD, EG, 1G, 2G, 3G &c. esse continuè proportionales in ratione GC ad CD.

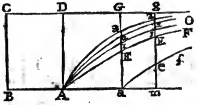
Nam ut GC ad CD, ita AD ad EG in prima hyperbola, & ut quadratum GC ad quadratum CD, ideſt in duplicata priorum ratione, ita AD ad 1G in hyperbola ſecunda, & ut cubus GC ad cubum CD, ita eadem AD ad 2G in hyperbola tertia, hoc eſt in triplicata priorum ratione, atque ita deinceps, ergo ipſæ AD, EG, 1G, 2G, 3G &c. ſunt continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Iisdem positis, sumatur GD æqualis distantiæ à centro DC, & per punctum G ordinetur communis aplicata GE.

Dico, spatium primæ hyperbolę FEADGO, ad partes O infinitum, aquari aggregato ex infinitis spatiis omnium hyperbolarum per ipsam GE resectis, videlicet GEFO, † G11O, † G22O, † G33O &c.



COmpleatur rectangulum GDA*a*, & per punctum *a*, inter asymptotos ADG transeat hyperbola *aef* primæ AEF æqualis prorsus, & similis, ac similiter posita, imò eadem sola positione differens; eritque spatium O*fea*GO idem quod OFEADO. Ordinata igitur ubilibet *e*E 1 2 3 *g*, quoniam, *per præcedentem*, est E*g* ad 1*g*, ut *g*C ad CD, erit per conversionem rationis *g*E ad 1E, ut *g*C ad *g*D, nempe in ratione composita ex *g*C ad DC (nempe DA ad *g*E) & DC, vel æqualis DG, ad *g*D (seu *ge* ad G*a* aut DA) hæ autem duæ rationes componunt illam, quæ est *ge* ad *g*E, ideoque = *g*E ad 1E, quare *per Propos.* 1. *ge* æqualis erit omnibus proportionalibus terminis E*g*, 1*g*, 2*g*, 3*g* &c. siquidem est tertia proportionalis post primam differentiam E1, & primam magnitudinem E*g*; Hoc ubilibet demonstrato, patet omnem ordinatam *eg* in spatio O*fea*GO æquari omnibus ordinatis aliarum hyperbolarum per ordinatam GE resectarum, adeòque & ipsum spatium O*fea*GO, vel illi æquale OFEADO, æquari prædictis infinitis hyperbolarum portionibus. Quod erat demonstrandum.

CO-

COROLL. Hinc ablato communi ſpatio OFEGO, ſpatium hyperbolicum DGEA, ordinatis proportionis duplæ interceptum, æquale erit infinitis ſpatiis quadrabilibus per reliquas hyperbolas determinatis, nempe G 1 1 O † G 2 2 O † G 3 3 O &c.

PROPOSITIO XII.

Sumpto parallelogrammo hyperbolæ inſcripto pro unitate, erit ſpatium hyperbolicum, ordinatis rationis duplæ interjectum, æquale ſeriei fractionum, in quibus unitas denominatur productis ſingulorum per ordinem numerorum in terminos rationis duplæ.

Id eſt $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32}$ &c.

Quia enim *per prop.* 10. EG, 1G, 2G, 3G &c. ſunt continuè proportionales in ratione GC ad CD, quæ hic eſt ratio dupla, erit & ſeries æquè altorum rectangulorum EGC, 1GC, 2GC, 3GC &c. ſeries rationis duplæ, cùmque EGC computetur pro unitate, erit 1GC = ſemiſſi, & 2GC = quadranti, & 3GC = octanti &c. ſed ex his, quæ demonſtravimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. ſpatium hyperbolæ ſecundæ G 1 1 O = inſcripto rectangulo, nempe ſemiſſi, & ſpatium hyperbolæ tertiæ G 2 2 O = ſemiſſi inſcripti rectanguli 2GC, adeòque $= \frac{1}{2.4}$, & ſpatiũ quartæ hyperbolæ G 3 O = trienti rectanguli 3GC, atque adeò $= \frac{1}{3.8}$ &c. ergo agregatum ex illis hyperbolicis ſpatiis, ideſt *per Coroll. prop. præced.* ipſum ſpatium ADGE, ordinatis rationis duplæ in hyperbola primaria interjectũ, = ſeriei in titulo propoſitæ. Quod erat &c.

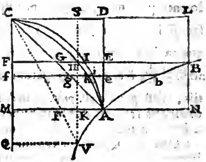
COROLL. Quoniam Quælibet Hyperbolica ſpatia, ordinatis ad alteram aſymptoton interjecta, ſunt inter ſe, ut ratio-

rationes extremarum ordinatarum, ut oſtendimus *in Hugenianis cap. 6. n. 3.* cognita ratione ordinatarum, quibus interjacent hyperbolica ſpatia, cognoſcetur eorum proportio ad ſpatium interjectum ordinatis rationis duplæ, quarè data in præcedenti propoſitione hujus dimenſio per infinitam ſeriem rationalem, quæ ejuſdem valorem quantumvis accuratum determinat, inſerviet etiam pro ſimili dimenſione quorumvis propoſitorum ſpatiorum ab hyperbola reſectorum.

SCHOLION.

H*Æc ad quadraturam Hyperbolæ* per Infinitas Hyperbolas quadrabiles *pertinent; ſupereſt, ut idem* per Infinitas Parabolas *aſſequi tentemus, id quod multò adhuc faciliùs, & expeditiùs obtinebimus; Nam hoc, ut præfati ſumus, nobis olim palmarium fuerat, cùm ſeſe ut peregrinam menti noſtræ hæc Veritas obtuliſſet, quam demum inter Geometriæ Lares olim receptam deprehendimus; ſed ſive novam, ſive antiquam horum mathematicorum receſſuum incolam, ſic illam nos adornamus.*

PROPOSITIO XIII.



H*yperbola A B inter aſymptotos M C D exiſtente, quibus ſint parallelæ A E D, B E F convenientes in E, conjuncta verò ad centrum A C, ſecante B F in G, ipſis C D, ſeu B E, & G E ſumatur tertia proportionalis E H, & quarta E I, atque ita deinceps in infinitum.*

Dico

Dico lineam F B æquari omnibus illis infinitis terminis E F, E G, E H, E I &c.

Completis enim parallelogrammis D A M, F B L æqualibus *per* 12. 2. *Conic.* erit F C ad C M, seu F G ad M A, vel F E, ut eadem M A, vel F E ad F B; quia ergo F B est tertia proportionalis post F G primam differentiam proportionalium terminorum, & F E primum terminum, erit *ex prop.* 1. F B æqualis omnibus simul prædictis terminis. Quod erat &c.

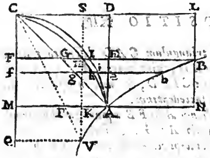
PROPOSITIO XIV.

Iisdem positis, & intra triangulum C A D descripto trilineo parabola quadratica C H A D, cujus vertex A, tangens A D; item trilineo parabola Cubica C I A D, & aliis in infinitum altiorum graduum ex ordine succedentium.

Dico, Spatium Hyperbolicum A M F B æquari parallelogrammo M A E F, cum triangulo A E G, & trilineis parabolicis A E H, A E I, cæterisque deinceps per eandem ordinatam abscissis.

Lineæ siquidem F E, E G, E H, E I &c. erunt continuè proportionales, nempe correspondentes potestatibus abscissarum D A, A E ordinatim crescentibus, ergo *per prop. præced.* erit aggregatum ex ipsis equale toti F B; similiter ducta quavis alia parallela *f b*, ostendetur, hanc æqualem esse aggregato linearum correspondentium *f e*, *g e*, *h e*, *i e* &c. ergo omnes lineæ spatii hyperbolici M A B F æquales sunt omnibus lineis parallelogrammi M A E F, necnon omnibus Trianguli G A E, & trilineorum H A E, I A E &c. adeòque ex methodo Indivisibilium (quam in præsenti negotio, & in plerisque antecedentium Propositionum facilè ad Veterum exhaustionem reduces, loco linearum assumptis æquè altis parallelogrammulis figuras circumscribentibus) ſpatium Hyperbolicum A M F B æquatur parallelogrammo, & Triangulo, Trilineiſque parabolicis ſupra deſcriptis. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc habetur, idem Hyperbolicum ſpatium A M F B [vel huic æquale A D L B] æquari parallelogrammo AEF, cum ſemiſſe ſubſequentis AEG, & triente alterius AEH, & quadrante ipſius AEI, mox $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ &c. ſequentium parallelogrammorum continuè proportionalium, quorum ſumma æquatur ipſi M F B N (ob baſium æqualitaté prçoſtenſam), Patet enim, cum ex aliis, tum ex nobis *cap.* 8. *Hugenianorum n.* 10. nedum triangulum G E A eſſe circumſcripti ſui parallelogrammi ſemiſſem, ſed trilineum parabolæ Quadraticæ eſſe trienté; Cubicæ verò quadrantem, atque ita deinceps, ſuorum reſpectivè parallelogrammorum.



COROLL. II. Unde ſequitur, complementum parallelogrammi M F B N, ſcilicet reſiduum ſpatium A b B N, æquari reliquo ſemiſſi parallelogrammi A E G, & duobus reſiduis trientibus parallelogrammi A E H, cum tribus quadrantibus ſequentis A E I, & $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ &c. ſubſequentium.

COROLL. III. Hinc obvium eſt, arithmeticam ſeriem exibere dictis hyperbolicis ſpatiis æqualem, adeòque aream hyperbolicam numeris quam proximè exprimere, ad ipſius valorem cum noto rectilineo ſpatio comparandum, ſi videlicet, determinato, ut priùs, inſcripto parallelogrammo A D C M pro unitate, & M A E F pro quavis ejus portione

[A] $\frac{a^1}{1}$ [M] $\frac{1}{2x^1}$

[B] $\frac{a^2}{2}$ (N) $\frac{1}{2x^2}$

[C] $\frac{a^3}{3}$ (O) $\frac{1}{3x^3}$

(D) $\frac{a^4}{4}$ [P] $\frac{1}{4x^4}$

[E] $\frac{a^5}{5}$ (Q) $\frac{1}{5x^5}$

(L) $\frac{1}{x}$

tione $= a$, & consequenter AEG $= aa$, AEH $= a^3$, AEI $= a^4$ &c. dicatur spatium ABFM $=$ (A) $+$ [B] $+$ (C) $+$ (D) $+$ (E) &c., & AbBN $=$ (B) $+ 2$ (C) $+ 3$ (D) $+ 4$ [E] &c. Vel si mavis parallelogrammum MAEF supponere $=$ (L) fiet spatium ABFM $=$ (M) $+$ (N) $+$ (O) $+$ (P) $+$ (Q) &c. & AbBN $= 1$ (N) $+ 2$ (O) $+ 3$ [P] $+ 4$ (Q) &c. Nimirum si AE ponatur semissis ipsius AD, spatium ABFM [jam terminatum ordinatis rationis duplæ) erit $=$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160}$ &c. (quæ est ipsissima series de qua *in prop.* 12. eandem æqualitatem ostendimus) spatium verò AbBN $= \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{3}{64} + \frac{1}{40}$ &c.

PROPOSITIO XV.

E*Andem Quadraturam analytica ostensione confirmare, ejusdemque cum Leibnitziana consensum aperire.*

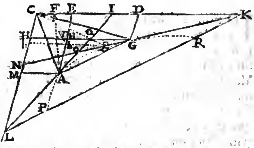
ID non meliùs assequar, quàm si doctissimam Epistolam hoc loco rescripserim, qua id, pro sua in me humanitate, præstare aggressus est Geometriæ, & Analyticæ rei consultissimus Adolescens, & de quo magna sperare liceat, Gabriel Manfredius, Eustachii Clarissimi Mathematici, atq. Astronomi Præstantissimi [cujus Tractatum de Curvis Planetariis Cassinianis, cui dudum incumbebat, expectamus, otiumque ejus perfectioni necessarium ipsi apprecamur] in Patrio Bononiensi Archigymnasio Mathesim publicè Profitentis, Dignissimus Frater, quum illi meum hoc inventum de more communicassem, eaque utrumque nostrum sollicitudo teneret, annon cum Leibnitziana Sectoris Conici Quadratura, *Actorum Lipsiæ* 1691. *Mense Aprilis* proposita, consonum esset; [Neutro scilicet nostrum in Cl. Mercatoris operibus tale quid de Hyperbolæ Quadratura jam diù propositum esse suspicante, quod postmodùm animadvertimus, ut in Præfatione jam dictum est] ostendit enim, ex iisdem Leibnitziani Calculi principiis, Aream Hyperbolæ, tum ad nostram, tum ad Leibnitzianam seriem reduci posse. Ne verò Tyronibus Geometricis salebrosior ejus ostensio videatur, ubi pauló pressiùs arguit, asteriſmos apponam parentheſi inclusos, iisque ex ordine respondebunt Notæ ad calcem Epistolæ subnectendæ, quibus omnem deductionis vim in aperto posuisse me arbitror.

GABRIELIS MANFREDI

EPISTOLA AD AUCTOREM,

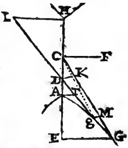
Propositionis hujus demonstrationi inserviens.

Vir Clariss.



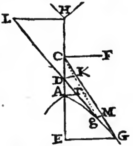
Sit inter asymptotos C L, CK *Hyperbola AG, cujus puncta quævis duo A, & G, & per G sit asymptoto* C K *parallela GH, nec non per A asymptoto* LC *parallela AE, ipsă GH secans in B,* C K *verò in E, & supponatur ipsi BG infinitè*

nitè proxima bg, *& per* b *ad BG normalis* bV, *per A verò ad CK normalis AF : ponaturque* $AE = 1$, $CE = a$, $AF = b$, $AB = x$, *unde* $BE = 1 - x$, *&* $BG = \frac{ax}{1-x}$, *&* $Bb = dx$; *quare propter similia triangula EAF*, BbV, *erit* $bV = bdx$, *quæ ducta in BG, sive* bg, *dat spatiolum* $BbgG = \frac{abxdx}{1-x} = abxdx + abx^2dx + abx^3dx + abx^4dx +$ abx^5dx *&c.* [* 1] *Quæ series est differentiale seriei* $\frac{abxx}{2} + \frac{abx^3}{3} + \frac{abx^4}{4} + \frac{abx^6}{5} + \frac{abx^6}{6}$ *&c.* (* 2) *quarè series hæc erit æqualis spatio ABG, quod tuæ subtilissimæ inventioni adamussim consonat.*



Sed & Leibnitziana similiter ostendetur Quadratura. Esto enim axis Hyperbolæ GA ipsa recta CAE, & ejus quidem semitransversum $CA = a$, *semisecundarium verò* $CF = 1$, *& assumpto quovis puncto Hyperbolæ G, eique proximo* g, *jungatur CG diameter, eique proxima alia* Cg, *& juncta* Gg [*quæ tangens erit*] *secante axem in D, ducatur ex D ad CG perpendicularis KD, & portio lineæ AT, quæ continetur inter A, & tangentem* [*si sit AT ad CE normalis in A*] *sit* $= x$, *erit* $CE = \frac{axx + a}{1 - xx}$ (* 3) *cujus differentiale* $= \frac{4axdx}{1 + x^4 - 2xx}$ *&* $GE = \frac{2x}{1 - xx}$ [* 4] *cujus differentiale* $= \frac{2dx + 2xxdx}{1 + x^4 - 2xx}$ [* 5] *quorum differentialium quadratorum summa dabit lineola* Gg *quadratum, quæ proinde lineola erit* $\frac{2dx\sqrt{4aaxx + 1 + x^4 + 2x^2}}{1 + x^4 - 2xx}$ [* 6] *seu posita quantitate* $\sqrt{4aaxx + 1 + x^4 + 2xx} = c$, *erit*

erit $Gg = \frac{2cdx}{1 + x^4 - 2xx}$; *erit autem CD, propter tangentis Hyperbolæ proprietatem*, $= \frac{a - axx}{xx + 1}$ [* 7] *unde propter similia triangula CGE, CDK, erit* K*D equalis*



$$\frac{2ax - 2ax^3}{\overline{1+xx}\sqrt{aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx}}$$

[* 8] *& cùm sit* $GD = \frac{2xc}{1 - x^4}$ [* 9] *erit Mg* (*arcus circuli, centro C, intervallo Cg descriptus*) $=$

$$\frac{2adx}{\sqrt{aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx}}$$

[* 10] *Quę quantitas Mg ducta in CG dat duplum trianguli* CGg, *quod proinde triangulum erit* $= \frac{adx}{1 - xx}$ [* 11] *hoc est* $= adx + axxdx + ax^4dx + ax^6dx$ &c. *cujus seriei cùm sit integrale* $ax + \frac{ax^3}{3} + \frac{ax^5}{5} + \frac{ax^7}{7}$ &c. (* 12) *sequetur, hanc seriem æquari sectori* CG*A, prorsus ut Leibnitzius cit. loco. Idemque proportionaliter Circulo, & Ellipsi applicabitur.*

Debet igitur necessariò tua ingeniosa inventio cum iis, quæ D. Leibnitzius ostendit, coincidere, nec mihi ampliùs dubium erit, quin vestrum utriusque mentem sim assequutus, quas in Veritatem unanimiter conspirare tandem deprehendi.

Te Vir Cl. . . . . . . &c.

NOTÆ IN PRÆCEDENTEM EPISTOLAM.

Ne iterum cogamur fractiones repetere cum nimio Typographi incommodo, illas subinde significabimus per asterismos adnexos, itaut quilibet asterismus cum numero

mero conjuncto denotet, vel seriem, vel simplicem fractionem, quæ immediatè præcedit similem asterismum in Epistolæ textu.

(* 1) Quoniam videlicet series hæc ducta in 1. producit seipsam, ducta verò in $-x$ dat $-abx^2\,dx - ab\,x^3\,dx - ab\,x^4\,dx$ &c. ubi omnes termini elidunt singulos prioris seriei, integro solùm remanente $ab\,x\,dx$ numeratore fractionis illius, cui hæc series in Epistola æqualis asseritur. Vide *nostra Hugeniana Theoremata cap* 10. *n.* 5.

(*) Differentia enim cujusvis potestatis indeterminatæ x est eadem potestas ducta in suum exponentem, & una ejus dimensione differentiata, quantitatibus constantibus, quibus afficitur, invariatis, quippe quarum nulla est differentia ut ostensum est *in Tractatu de Infinit. Infinitor. in Schol. prop. V.* itaque differentiando hanc seriem prodit illa præcedens $ab\,x\,dx + ab\,xx\,dx + ab\,x^3\,dx$ &c.

[* 3] Sit enim integra diameter transversa ACH, & tangens GD producta occurrat HL tangenti oppositæ Hyperbolæ in L; erit *per* 42. 3. *Conic.* TA in HL = quartæ parti figuræ, seu quadrato secundæ semidiametri CF, nempe = 1; unde cùm AT sit = x, erit HL = 1 divisæ per x; itaque $1 - xx$ erit HL in AT minùs AT quadrato, seu HL − AT in AT; & $1 + xx$ erit HL in AT + AT quadrato, seu HL + AT in AT; quare $1 - xx \,.\, 1 + xx$ :: HL − AT . HL + AT :: HD − DA . HD + DA :: AC + CD − DA . HA :: 2CD . 2CA :: CD . CA :: CA . CE [37. 1. *Conic.*] :: a . CE æqualem fractioni propositæ.

[* 4] Quia proportionalium EC, AC, DC etiam differentiæ sunt proportionales, erit EA . DA :: EC . AC, vel CH, & componendo, ac convertendo, AD . DE :: CH . HE :: $a \,.\, a +$ [* 3], quod instituta divisione per a, & multiplicatione per $1 - xx$ dat $1 - xx \,.\, 1 - xx + xx + 1$ :: $1 - xx \,.\, 2$; cum ergo in eadem ratione AD . DE sit AT seu x ad EG, erit hæc = fractioni propositæ.

(* 5)

(*5) Cujusvis enim fractionis differentia est factum ex denominatore in differentiam numeratoris, minùs facto ex numeratore in differentiam denominatoris, utroque diviso per denominatoris quadratũ: putà differentia ipsius $\frac{n}{m} = \frac{mdn - ndm}{mm}$ itaque differentia ipsius [*4] = aggregato $2dx - 2xxdx + 4xxdx$ (nempe $2dx + 2xxdx$) diviso per quadratum residui ex $1 - xx$, ut denotat fractio hic assignata: quemadmodùm & supra ipsius (*3) differentiale positum est quod resultat ex divisione $4xdx$ per $1 + x^4 - 2xx$, quia $2axdx - 2ax^3dx + 2ax^3dx + 2axdx = 4axdx$.

(*6) Quadratum enim fractionis positæ in Epistola paulò post (*3) $= 16aaxxdx^2$ diviso per quadratum ipsius $1 + x^4 - 2xx$, & quadratum alterius fractionis, quæ in Epistola adducitur paulò post (*4) est trinomium $4dx^2 + 4x^4dx^2 + 8xxdx^2$ divisum per quadratum ejusdem $1 + x^4 - 2xx$, adeòque utrumque = polynomio $16aaxxdx^2 + 4dx^2 + 4x^4dx^2 + 8xxdx^2$, cujus radix est quæ hìc assignatur.

(*7) Visum est enim *num.* 3. esse $xx + 1$ ad $1 - xx$, ut CA idest a, ad CD, quæ propterea erit, ut hìc notatur.

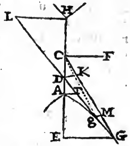
(*8) Nam CG est radix quadratorum CE, & GE, idest (*3), & (*4) ergo CG, æqualis radici polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$ divisæ per $1 - xx$, est ad GE (*4), ut CD [*7] ad DK æqualem fractioni propositæ.

(*9) Etenim DA = CA − CD = $a -$ (*7) $= axx + a - a + axx$ divisis per binomium $xx + 1$, seu $= 2axx$ per idem binomium diviso; est autem CD = [*7] ad CA $= a$, ut ipsa DA ad AE, quæ ideò prodit $2axx$ divisum per $1 - xx$, undè tota DE fit summa ex $2axx$ diviso per $xx + 1$, & ex eodem diviso per $1 - xx$; quod relinquit $4axx$ divisum per $1 - x^4$; Jam, ut differentia CE = fractioni, quæ in Epistola subjungitur post (*3) ad

Cg

$Cg = 2cdx$ diviso per quadratum ipsius $1 - xx$, ita DE, $=$ fractioni nuper inventæ, ad $DG = (*9)$, ut proponitur.

(*10) Ob proportionales $GD . DK :: Gg . gM$, fit [*9] ad $2ax - 2ax^3$ divisos per factum ex binomio $1 + xx$ in radicē polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$, ut $2cdx$ divisus per quadratum ipsius $1 - xx$ ad aggregatum $2adx - 2ax^4dx - 2axxdx + 2ax^6dx$ divisum per productum ex polynomio $1 - xx - x^4 + x^6$ in radicem polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$, quæ fractio evadit tandem $=$ (*10) dividendo numeratorem per $1 - xx - x^4 + x^6$



(*11) Quippe ex dictis *num.* 8. $CG =$ radici polynomii $aax^4 + aa + 2aaxx + 4xx$ divisæ per $1 - xx$, quæ ducta in Mg dat pro rectangulo duplum propositæ fractionis, cujus adeò dimidium triangulum elementare CGg eidem fractioni adæquatur.

(*12) Hæc reductio in infinitam seriem trianguli elementaris, ejusque integratio pro valore Sectoris Hyperbolici, patet ex jam notatis in simili *ad num.* 1. *&* 2. Quarè manifesta sunt omnia Viri Clarissimi Pronunciata: Quæ tamen nolim pro Viris in Geometriæ adyta jam admissis, sed pro Tyronibus tantùm notata esse; itaque.

Qui satis hæc novit, ne sibi dicta putet:
Quamquàm adhuc longè pluribus dicendum esse vereor:
Qui neque sic capiunt, non sibi dicta putent.

MONITUM.

Dum nuper Florentia transirem, Pisas rediturus, apud Celeberrimum Magliabechium Acta Eruditorum Lipsiæ anni 1708. cursim videre licuit, in quibus novam

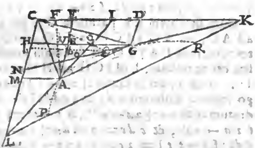
Analyticarum operationum expressionem, typographis magis commodam, ab Illustri Leibnitzio propositam, usurpari animadverti, cum voto, ut Geometræ omnes in eadem signa consentire velint. Idem & mihi proposuerat ipse Leibnitzius, doctissimis litteris suis datis Hanoveræ 21. Julii 1705. quibus Opusculum hoc nostrum tetragonismicum commendabat; sed non ausus sum ad praxim deducere, ne tam frequens signorum mutatio confusionem pareret; nunc autem, cùm eadem Leibnitziana signa recepta apud Germanos videam, nihil vetabit, quominus eorum usum & apud Italos primus ipse promoveam.

Itaque pro vinculo conjungente aliquod polynomium, parenthesim deinceps apponam; pro signo divisionis, duo puncta adhibebo, quibus distinguetur numerator à denominatore fractionis; pro multiplicationis indice, inter duo distincta membra coefficientia, unum comma apponetur, nisi simplex illorum juxtapositio id satis expresserit.

Exempli causa $a:b$ denotabit a divisum per b; unde etiam $c:e = f:g$ indicabit fractionem ex c diviso per e æquari fractioni ex f diviso per g; sive etiam [quod æqualitas fractionum poscit] esse c ad e, ut f ad g; unde sæpe non alio indigebimus signo proportionalitatis, cùm idem inservire possit ad æqualitatem rationum indicandam, quod absolutarum quantitatum æqualitatem referre jam solet. Rursus ubi inveneris $xx:(a+x)^2$, intelliges xx divisum per quadratum totius complexi $a+x$; item $[2a-x]^2 - xx]:(2a-x)^2$ significabit complexū ex quadrato ipsius $2a-x$, & ex $-xx$ dividendum per quadratum complexi ex $2a-x$; Similiterque $x^{1:p}$ denotabit ipsius x talem potestatem, quam indicat unitas divisa per p; eademque ratione $(a+x)^{n:m}$ exprimet complexi $a+x$ talem potestatem, qualem refert n divisum per m. Pariter $\sqrt{}(aa+xx)$ stabit pro radice eruenda ex binomio $aa+xx$. Quoties occurret $ee+f(g+b)$ indicabit ad quantitatem ee addi debere factum ex f in complexum $g + b$; quod si totum $ee + f$ multiplicandum fuisset per $g + b$, scripsissem $[ee + f]$, $(g + h)$. Ut multiplicetur verò ab in factum ex $e + c$ ducto in radicem $aa + ae$, scribetur ab, $(e + c)$, $\sqrt{(aa + ae)}$. Sic semper ad ad indicandum factum ex pluribus quantitatibus invicem multiplicatis, commate inter singula membra posito, res expedietur: excipio numeros, in quibus multiplicatio de more indicabitur insertis punctis, ut 2. 3. 4. significat factum ex his tribus invicem ductis, nempe 24. Tandem ubi occurrent series plurium fractionum, aut illas more solito interpositis lineis indicabo, nec enim spatia typorum valdè turbabunt, si extra textum litterarum in una serie totam aliquam lineam occupante disponantur; vel si ipsas Leibnitziano modo consignare libuerit, punctis cum commate interponam singulis, ad eas distinguendas: ut $by^m : c ; + ae^m : a ; + af^m : p$ significabit fractionem ex by^m diviso per c, cum alia fractione ex ae^m diviso per a, cum alia rursus in qua af^m dividitur per p &c.

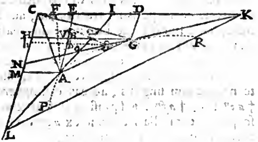
PROPOSITIO XVI.

IDem consensus cum Cl. Leibnitzio breviùs, & immediatiùs proponitur.



SInt eadem, quæ in primo §. Ingeniosissimæ Epistolæ superiùs adductæ, nisi quòd supponendus est CA sectionis axis $= c$, AL verò, aut AI tangentis portio vertici & asymptotis interposita (quæ &

æquatur semiaxi conjugato *per* 1. 2. *conic.*) esto $= 1$, adeòque A E non jam pro unitate computetur, sed sit $= a$ (uti & C E illi in hoc casu æqualis) fiet jam $bV = bdx : a$, item $HG = aa : [a - x]$ (ut ex simplici linearum proportionalitate patet) itaque spatiolum $GgbH = abdx : (a - x)$ idest $= bdx$; $+ bxdx : a$; $+ bxxdx : aa$; $+ bx^3dx : a^3$ &c. cujus Integrale, nempe spatium A M H G $= bx$; $+ bx^2 : 2a$; $+ bx^3 : 3aa$; $+ bx^4 : 4a^3$ &c. ut habet quadratura à nobis superiùs tradita.



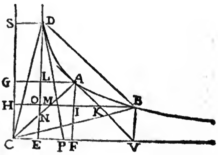
Verùm ob proportionales I C : C A $=$ I A : A F [propter triangulum C A I rectangulum simile ipsi C A F) est $2a . c :: 1 . b = c : 2a$, quo valore loco b substituto in quantitate $abdx : [a - x]$ designante, ex dictis, spatiolū elementare GgbH, evadet hoc spatiolū $= cdx : (2a - 2x)$, & multiplicando tam numeratorē, quàm denominatorem per 2, mox denominatori addendo $xx - xx$ (quod non variat valorē, cùm sit $= 0$) fiet $2acdx : [4aa - 4axx + xx - xx]$ seu $2acdx : (2a - x)^2 - xx) =$ dicto spatiolo.

Ita enim supponēdum in figura, licet id non exprimat.

Cùm sit autem K L parallela G A *per* 44. 3. *Conic.* ut L A ad A O, ita *K* G ad G O, vel I Q ad Q O, & summa antecedentium L A + I Q ad summam consequentium A Q, seu ob parallelas, L M + C H ad H M nempe $2a - x$ ad x :: L A, ideſt 1, ad A O $= x : [2a - x]$ quam vocemus t; ergo ipsius t differentia $dt = 2adx : [a - x]^2$ ejusque quadratum $tt = xx : [2a - x]^2$, & $1 - tt = [2a - x]^2 - xx)$: $(2a - x)^2$, & $c\,dt = 2cadx : (2a - x)^2$, & demum $c\,dt : [1 - tt] = 2cadx : (2a - x)^2 - xx) =$ spatiolo $GHbg$, quod resolvendo de more in seriem infinitam, pro-

prodit $c\,dt + ctt\,dt + ct^4\,dt + ct^6\,dt$ &c. cujus integrale jam erit $ct; + ct^3 : 3; + ct^5 : 5; + ct^7 : 7$ &c. prorſus ut Clariſſimus Leibnitzius determinavit, æquale ſpatio AMHG, ſive ſectori hyperbolico ACG, cui illud æquatur, ob triangula CHG, CMA æqualia, & commune ablatum HRC, ac utrique additum ſpatium ARG. Patet igitur noſtrarum ſpeculationum conſenſus cum profundiſſimis Summi illius, & Incomparabilis Geometræ cogitatis, quamquàm haud putarim per tot ambages ipſum proceſſiſſe, ſed longè ſimpliciori demonſtratione [illi fortè affini, quam pro Circulari, & Elliptico ſectore *prop. 9.* jam dedimus] in Veritatis hujus cognitionem veniſſe.

SCHOLION.



Simile quid de Hyperbola Cl. Hugenius propoſuit in diatriba de cauſa gravitatis; *ſupponens enim DAB hyperbolam æquilateram, cujus ſemiaxis CA, aſymptoti SC, CV, ductaque tangente AV = AC = 1, ac juncto quovis alio ramo CB, ſecante AV in* K, *ſi AK vocetur* a *(quæ erit minor unitate) fiet ſector ACB ad triangulum ACV, ut ſeries* $a; + a^3 : 3; + a^5 : 5; + a^7 : 7$ *&c. ad* 1. *Quod ipſum de inſcripto quadrato AGCF, eidem triangulo CAV æquali, & de ſegmento AGHB, vel AFVB binis ad aſymptoton ordinatis interjecto [nam alterutrum eidem ſectori ACB æquatur ex dictis* in Tract. de Infin. lemm. 1. Epiſtolæ Geometr.] *intelligendum pariter voluit; Nec admodum diverſa eſt demonſtratio.*

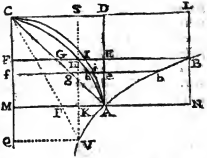
MO-

MONITUM.

Absolutam vides, Mi Lector, Hyperbolæ per infinitas parabolas Quadraturam, & extra cujuslibet dubii discrimen jam positam, ostenso ejus cum Leibnitzianis speculationibus consensu; Ad methodi tamen confirmationem subdere placet aliquot aliunde nota ad Hyperbolæ mensuram pertinentia, quæ ex nostris hisce Propositionibus sponte sua profluunt. Exempli causa.

PROPOSITIO XVII.

Quodlibet Hyperbolicum spatium LCMAbB, Hyperbolæ, & Asymptoto infinitè productis interjectum, est magnitudinis absolutè infinita.



Quia enim in hoc casu idem parallelogrammum MADC circumscribitur, & triangulo CAD, & trilineis parabolicis CHAD, CIAD &c. erit, *juxta prop.* 14. spatium Hyperbolicum in titulo designatum æquale inscripto parallelogrammo semel integrè accepto, unà cum 1:2; 1:3; 1:4; 1:5; 1:6; 1:7; 1:8 &c. ejusdem. Verùm omnes hæ fractiones, quibus unitas per singulos numeros denominatur, æquales sunt infinitis unitatibus (nam tres primæ superant unitatem, & novem sequentes adhuc aliam unitatem excedunt, & 27. deinceps altera unitate rursus sunt majores, & 81. succedentes similiter

ter plusquàm aliam unitatem conficiunt, atque ita porrò sumptæ juxtà altiores potestates ternarii, ut observat V. Cl. Petrus Mengolus Bononiensis *in præf. libri de Quadrat. Arith.*) ergo & illud spatium Hyperbolicum longitudine infinitum æquivalebit infinitis numero parallelogrammis inscriptis, adeòque absolutè magnitudinis erit infinitæ, ut dudum alii demonstrarunt, & nos ipsi ostendimus *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 11. Quod erat &c.

COROLL Spatia infinita ejusdem gradus, quantumlibet finita quantitate differant, sunt invicem æqualia: putà, spatium LCMAB, & spatium LCFB, utraque ad partes BL infinita, sunt exactissimè æqualia, licèt primum videatur superare secundum spatio MABF. Hoc quidem satis per se notum est intelligentibus quid sit Infinitum, neque id ullam apud Geometras dubitationis umbram suscipere potest, quum sciant, finiti ad infinitum nullam esse rationem, proindeque non crescere posse infinitum ex solius additione finiti, quemadmodùm neque crescit linea ad unius puncti incrementum; & generaliter, quantitates, quarum differentia infinitè exigua est, semper à Geometris, & Analystis æquales censeri, ut præsertim videre est apud Thomam Cevam in eleganti Opusculo *de Parab. ad mod. ellipſ. conſid.* & apud Hospitalium *de infinitè exiguis*. Quia tamen Philosophorum nonnulli id in dubium vocare ausi sunt, ex suis dumtaxat præjudiciis, crassoque loquendi, & æstimandi modo rem metientes, non gravabor id exacta demonstratione in hunc modum stabilire.

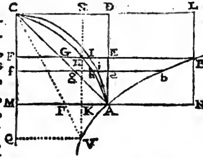
Ostensum est *hac propoſ.* infinitum spatium LCMAB æquari parallelogrammo MACD, ejusdemque semissi, & trienti, & quadranti, cæterisque partibus per singulos numeros denominatis; eodem autem ratiocinio constat, & spatium infinitum LCFB æquari parellelogrammo FBLC, cum ejus semisse, triente, quadrante, similibusque partibus deinceps assignabilibus; suntque integra parallelogramma ma MADC, FBLC *per* 12. 2. *Conic.* invicem æqualia, adeòque etiam utriusque semisses, trientes, quadrantes, & quotlibet similes partes perpetuò æquantur; ergo & ipsa infinita spatia prædicta, licèt finita magnitudine MABF differre invicem videantur, exactè æqualia nihilominus erunt. Quod fuerat demonstrandum.

SCHOLION.

IMò, nedum infinitæ magnitudines æquales censendæ sunt, cùm finita quantitate semet excedunt, sed quandoque etiamsi excessu absolutè infinito se invicem superent, possunt nihilominus æquales manere, cùm scilicet integræ magnitudines, quæ comparantur, non fuerint in eodem genere Infinitatis cum sua differentia, sed in ordine altiori, ut patere potest ex aliàs dictis in Tract. de Infinit. Infinitor. prop. 3. Coroll. 2.

PROPOSITIO XVIII.

SPatia VQMA, AMFB, ordinatis proportionalibus VQ, AM, FB (sive continuis, sive discretis) interiecta, sunt invicem æqualia.



ETenim proportionales erunt pariter distantiæ à centro QC, MC, FC, adeòque eadem pars erit parallelogrammum VQMK ipsius VQCS, quę FEAM ipsius MADC, nec non eadem pars trianguli PKV ipsius VSC, quæ GEA ipsius ACD; sunt autem tum integra parallelogramma, tum integra trian-

triangula VSC, ADC inter se æqualia *per* 12. 2. *Conic.* ergo & eorum portiones similes VQMK, & AEFM, necnon VKP, & AEG invicem sunt æquales: similiter ostenderetur, reliqua trilinea parabolica, quæ utrique segmento correspondèrent, facta utrobique descriptione, quam *prop.* 14. fieri imperavimus, esse pariter invicem æqualia, quippe eadem pars integrorum ejusdem nominis trilineorum, parallelogrammis VSCQ, ADCM inscriptorum, quæ, non minùs ac ipsa parallelogramma, invicem æquantur; æqualis igitur semper erit infinita series exprimens, juxtà *prop.* 14. *ejusque corollaria*, valorem, seu quantitatem utriusvis segmenti hyperbolici VQMA, AMFB, quæ proptereà hac etiam methodo æqualia ostenduntur, non minùs quàm id geometricè factum fuerit, tum à Gregorio à S. Vinc. aliisque, tum à nobis ipsis *in Hugenianis cap.* 6. *n.* 2. *&* *in Epist. Geom. Tract. de Infinit. lemm.* 3. *&* 4. Quod erat &c.

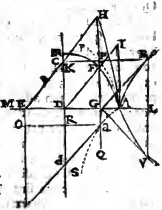
COROLL. I. Hinc facile fuerit datum quodvis Hyperbolicum spatium in data ratione secare, putà in ratione, quam habet m ad 1, sumptis inter extremas ordinatas datum spatium claudentes tot mediis proportionalibus, quot exprimit $m-1$; erit quippe ratio primæ ordinatarum ad primam mediarum assumptarum tam submultiplicata rationis extremarum ordinatarum, quàm multiplex fuerit m unitatis, adeòque prima ordinatarum cum prima mediarum intercipient hyperbolicum spatium $= 1 : m$ totius propositi, ut ostendimus *in Hugenianis cap.* 6. *n.* 3.

COROLL. II. Undè etiam constat, quomodo spatia eadem Hyperbolica sint velut Logarithmi rationis ordinatarum, sive distantiarum à centro, ut idem Gregorius à S. Vincentio primus animadvertit, & ex iis, quæ de Hyperbolæ ad Logisticam, seu Logarithmicam relatione demonstravimus *in Hugenian. cap.* 6. *n.* 4. *&* *cap.* 13. *n.* 8. colligi potest, necnon *loc. cit. de Infinit. lemm.* 6. ostensum est.

SCHOLION.

H*Æc satis ad methodi, qua in hujus Quadratura demonstratione usus sum, illustrationem, & confirmationem allata arbitror. Nunc quia* sub finem Capitis 13. Hugenianorum *aliam mechanicè expeditissimam Hyperbolæ Quadraturam ex simplici Tractoria deductam proposuisse me memini, quam & Leibnitzius à se dudum inventam testatus est in Epistolis ad me datis, de quibus supra* pag. 19, & 58, *illius veritatem hoc loco demonstrare non incongruum fuerit, imò ad Argumenti, quod præ manibus habemus, complementum ita pertinere putaverim, ut intersit plurimũ, ne cæteras inter hac de re speculationes hæc minimè contemnenda desideretur. Præmittenda sunt autem sequentia.*

PROPOSITIO XIX.



E*Sto Hyperbola A B, cujus centrum D, axis transversus M A, semiaxis secundus priori conjugatus D* K, *positaque in axe primario ipsa D E æqualis D* K, *per polum E, intervallo D A Conchois describatur Nicomedea A* H, *cujus regula D* K, *& ramus quilibet E C H regulam secet in C, unde primo axi parallela C B occurrat Hyperbolæ in B, ramo autem E H parallela ex centro D I occurrat verticis tangenti A I in puncto I.*

Dico ipsam D I esse æqualem C B.

ORdinata enim B L, erit ejus, vel æqualis CD, quadratum ad rectangulum M L A ut rectum figuræ la-

tus

tus ad transversum (*ex* 21. 1. *Conic.*) sive ut secundæ semidiametri D*K*, vel DE quadratum ad quadratum DA, ergo permutando, DC quadratum ad quadratum DE, ut rectangulum MLA ad quadratum DA, & componendo, quadratum EC ad quadratum ED, ut quadratum LD ad quadratum DA: sed, ob similitudinem triangulorum ECD, DIA, ita est etiam quadratum DI ad idem quadratum DA, ergo DL, aut CB æquatur DI. Quod erat demonstrandum &c.

PROPOSITIO XX.

Isdem positis ordinetur in Conchoide HG regulę parallela, ipsam CB secans in P, & DI in F, jungaturque GB. Dico hanc fore tangentem Hyperbolæ in puncto B.

Radio DA circulus AN describatur, qui transibit omnino per punctum F, cùm sit, ob Conchoidem, CH æqualis DA, in parallelogrammo autem DCHF ipsi CH sit rursus æqualis DF; erit ergo ID ad DF (nempe LD *ex prop. præced.* ipsi æqualis ad DA) ut DA ad DG; quarè rectangulum LDG æquabitur quadrato DA, & *per Coroll. prop.* 37. 1. *Conic.* linea BG erit tangens. Quod erat demonstrandum &c.

COROLL. I. Hinc omnis ordinata hyperbolæ LB æqualis est portioni ordinatæ Conchoidis FH, inter Conchoidem ipsam AH, & arcum AF inscripti quadrantis interjectæ, modò hæc, producta ad axem in G, incidat in occursum tangentis BG cum eodem axe, quippe in parallelogrammo DCHF est HF æqualis DC, adeòque & ipsi BL.

COROLL. II. Puncta autem P, quibus eædem Conchoidis ordinatæ occurrunt axi parallelis BC, sunt ad curvam AP, Hyperbolæ correlatam, juxtà descriptionem datam *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 2. cùm sit B P æqualis subtangenti L G.

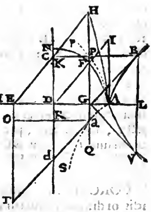
PROPOSITIO XXI.

STantibus *præmissis: Dico, spatium Conchoidale F A H, arcu A F, curva A H, & ordinata portione F H circumscriptum, duplum esse trilinei Hyperbolici G B A, per tangentem G B, curvam A B, & axis segmentum A G determinati.*

CUm linea F H sit ubique æqualis B L, seu G P, erit spatium Conchoidale A F H æquale portioni Correlatæ G P A; sed, ex dictis *ad finem num.* 2. *Capitis* 8. *Hugenianianorum*, portio illa correlatæ dupla est trilinei G B A, ergo & spatium A F H ejusdem trilinei est duplum. Quod erat demonstrandum &c.

PROPOSITIO XXII.

HYperbolam *simplicis ope Tractoriæ quadrare.*



SIt Hyperbolæ portio V A B quadranda, vel quod eòdem redit, trilineum G V A B, duabus tangentibus, & hyperbolæ curva V A B comprehensum, sit in rectilineum spatium expeditè commutandũ. Concipiantur omnia in horizontali plano jacere, & sumpto funiculo D A, pondere in extremo A apposito, quod subjectum planum premat, alterum extremum D secus axem secundum D R *d* trahatur, quo-

quousque funis D A transierit in *d a*, & pondus A trahentis directionem sequens fuerit perductum in *d*, secans lineam G Q secundo axi parallelam in ipso puncto *a*; tunc enim rectangulum ex semiaxe secundo D *K*, seu D E in G *a* æquabitur trilineo G V A B, quo propterea detracto ex triangulo V G B, innotescet Hyperbolicum spatium V A B.

Demonstratio. Funis D A, seu *d a* semper est tangens curvæ Tractoriæ A *a* descriptæ à pondere ejus directionem ubivis sequente, igitur tum radius quadrantis D F, tum ramus Conchoidis E H, erit ubique parallelus tangenti *a d* Tractoriæ (lineæ enim æquales, inter easdem parallelas ad easdem partes inclinatæ, sunt pariter parallelæ) itaque tum figuræ R D A *a* est correlatus quadrans D A F N, tum ipsi O E A *a* (ducta E O axi secundo parallela, extensisque *a* R, *a d*, quousque ipsam secent in O, T) correlatum est segmentum Conchoidale E A H; itaque, *per Cap.* 8. *n.* 3. *Hugenianorum*, erit portio O E A *a* æqualis segmento Conchoidali AGH, & portio RDA*a* ęqualis segmēto circulari A G F; reliquum igitur rectangulum O E D R, quod sub E D æquali semiaxi secundo, & sub D R, vel G *a* continetur, æquabitur residuo trilineo A F H; sed hoc, *per præcedentem*, duplum est trilinei A G B, ideſt æquatur trilineo V A B G; ergo & dictum rectangulum huic ipsi Trilineo Hyperbolico æquale erit. Quod fuerat demonstrandum.

COROLL. Hinc manifestum est, ipsas G *a* Tractoriæ axi parallelas proportionari trilineis Conchoidalibus A F H, & Hyperbolicis G A B sibi correspondentibus.

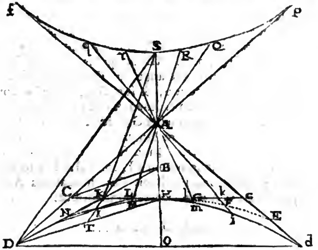
SCHOLION.

OBvium esset eandem methodum aliis Conchoidum generibus, ad aliarum Correlatarum figurarum dimensionem, extendere simili ratiocinio, sed cùm verear, ne ultra fines mihi constitutos

tutos hic Tractatus excurrat, id Lectoribus meis pro nunc exequendum relinquam: imò ex compluribus aliis, ad Circuli, & Hyperbolæ Tetragonismum spectantibus, duas dumtaxat propositiones, Auctarii loco, ad hyperbolam quadrandam conducentes subdere contentus ero, ob similitudinem, quam habent cum his, quæ in Scholio prop. 9. pag 41. *demonstravimus, ad circulum, per rationem ex infinitis compositam, dimetiendum pertinentia, ut affinitas Hyperbolæ cum Circulo, & Ellipsi melius innotescat.*

PROPOSITIO XXIII.

Sit hyperbolicus sector HIDA, cujus ad extrema puncta ductæ tangentes DB, HC conveniant in K: bisfariam itaque secabitur connexa ex centro A per K recta AKIT, quæ per



verticem Portionis HID omninò transibit, ejusque subtensam HD bisecabit (ex 30. 2. Conic.) *Sector autem HMIA simili-*

militer bifariam secetur recta A L M, per concursum tangentium H L, I L transeunte, atque eodem modo reliquus sector H M A bifariam sectus intelligatur, & sic deinceps.

Dico (ducta ad diametrum A H ordinata D O) fore triangulum A D O ad propositum sectorem H I D A in ratione composita ex D A ad A C, & I A ad A K, & M A ad A L, atque ita ex aliarum semidiametrorum, residuos sectores bisecantium, rationibus ad interceptas inter centrum A, & tangentem H C; quæ rationes componentes utique post aliquot bisectiones ferme degenerant in rationem æqualitatis.

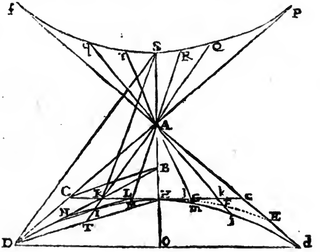
NAm A D O ad triangulum A D H est ut O A ad A H, vel D A ad A C; item [si rectæ lineæ subtendentes portiones H I, I D, nec non aliæ à terminis ad vertices portionum reliquarum connexæ supponantur) erit triangulum A D H ad quadrilineum A D I H, ut medietas ad medietatem, nempe ut H T A ad H I A triangulum [nam cùm D H à semidiametro A I sit bisecta in T, erunt invicem æqualia, tum ADT, ATH, tum DIT, TIH, adeoque, & reliqua triangula DIA, HIA] videlicet, ut T A ad A I, sive (*juxta* 37. 1. *Conic.*) ut I A ad A K; eodemque modo quadrilineum A D I H ad sextilineum comprehensum binis semidiametris A D, A H, & quatuor subtensis ad vertices portionum I D, I H, erit ut quarta pars unius ad quartam partem alterius, sive ut triangulum MHA ad LHA, nempe ut M A ad A L: & sic semper; ratio igitur trianguli A D O ad sectorem hyperbolicum H I D A, quæ componitur rationibus dicti trianguli A D O ad triangulum A D H, & hujus ad quadrilineum A D I H, & ipsius quadrilinei ad sextilineum prædictum, & sic deinceps ad alia multilatera per vertices reliquarum portionum adscripta, usquedum in ipsummet sectorem H I D A desinant, componetur rationibus D A ad A C; & I A ad A K, & M A ad A L, atque ita deinceps in infinitum. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Isdem positis, bisecentur singulę semidiametrorum portiones interceptę inter curvam hyperbolicam, & tangentem verticis H, nempe ipsa d c, i k, m l, *in punctis E, F, G (ad alteram figura partem sub minusculis litteris expressi, ad confusionem vitandam, sed ad eandem partem constructio concipienda est) ut fiat curva E F G.*

Dico Sectorem hyperbolicum H I D A esse ad triangulum A C H



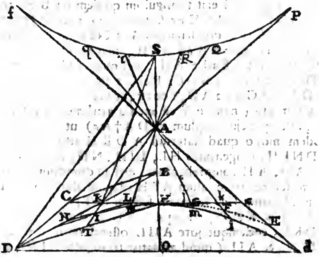
in ratione composita ex rationibus d *A ad A E,* i *A ad A F,* m *A ad A G, & sic deinceps ex aliarum semidiametrorũ bisecanti um residuos sectores, ad interceptas inter centrum A, & dictam curvam E F G: qua pariter rationes componentes brevi ad aqualitatem propemodum reducuntur.*

Pro-

PRoducantur semidiametri AH, AM, AI, AD ad oppositam hyperbolam SRQP, & jungantur SD, SK, BC; eritque SD parallela AT bifariam secanti diametrũ HS in A, & subtensam HD in T (2. 6. *elem.*) quare triangulum SKA æquatur ADK, & addito communi AKB, vel AKH erit triangulum quidem SKB = triangulo ADB (vel ACH *ex Eutocio ad* 43. 1. *Conic.*) triangulum verò SKH = quadrilatero ADKH; est ergo ACH ad ADKH, ut SKB ad SKH, nempe ut SB ad SH, sive ut HA † AB ad 2 AH, vel quia BC est parallela HD [ob triangula BDC, BHC æqualia ex 1. 3. *Conic.*] ut DA † AC ad 2 AD, hoc est, ut CP ad PD, vel sumptis dimidiis (nam EA est media arithmetica inter *d*A, *c*A, adeoque ejus duplum = DA † A*c*) ut EA ad A*d*. Eodem modo quadrilaterum ADKH ad quintilaterum ADNLH, tangentibus HL, LIN, ND, & semidiametris AD, AH comprehensum, erit ut dimidium ad dimidium, scilicet triangulum AKH ad quadrilaterum AILH; Nam ob basim HD bifariam sectam in T, ATD = ATH, & KDT = KHT, adeoque AKD = AKH = dimidio ADKH; eodemque jure AHL ostenderetur dimidium AILH, & AIL (quod æquatur triangulo AIN, quia LI = IN, ut HT = TD) = dimidio ADNI, ideoque AHL † AIL, nempe AILH = dimidio totius ADNLH; est autem AKH ad AILH (eadem ratione qua suprà) ut IA † AK ad 2 AI, sive ut QK ad QI, aut sumptis dimidiis ut FA ad A*i*, ergo in eadem ratione erit ADKH ad ADNLH; Quod si rursus comparetur ADNLH ad septilaterum, quod fieret ductis adhuc tangentibus per vertices portionum HI, ID, ostendetur pariter fore illud ad hoc, ut LR ad RM, sive ut GA ad A*m*; atque ita semper; Triangulum igitur ACH ad sectorem ADIH, cùm habeat rationem compositam ex dicto triangulo ad

K qua-

quadrilaterum ADKH, & ex hoc ad quintilaterũ ADNLH, & ex hoc ad ſeptilaterum ſupra deſignatum, atque ita porrò, uſque ad ipſum ſectorem, in quem hæc multilatera deſinunt, rationem habebit compoſitam ex A E ad A *d*, & A F ad A *i*, & A G ad A *m* &c. & convertendo conſtat propoſitum.



COROLL. I. Patet, ſectorem hyperbolicum A D I *H* ad triangulum A C *H* habere etiam rationem compoſitam ex D P ad P C, & I Q ad Q K, & M R ad R L, aliorumque diametrorum, continuè biſecantium reliquos ſectores, ad interceptas inter tangentem *H* C, & oppoſitam hyperbolam S R Q P: hoc enim in decurſu demonſtrationis oſtenſum fuit.

COROLL. II. Quia triangulum A D O ad ſectorem hyperbolicum A D I *H* eſt, *ex prop.* 23. in compoſita ratione D A ad A C, & I A ad A K, & M A ad A L, &c. idem

verò

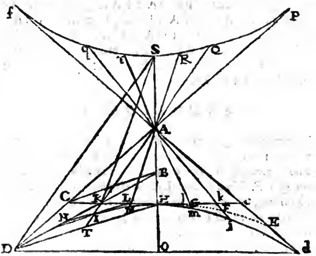
verò fector hyperbolicus ad triangulum ACH eſt, *ex hac prop.* in ratione compoſita ex *d* A ad AE, & *i* A ad AF, & *m* A ad AG &c. fit ex æquali ratio triangulorum ADO, ACH [hoc eſt duplicata OA ad AH] compoſita ex rationibus *d* A ad A*c*, & *d* A ad AE, nec non *i* A ad Ak, & *i* A ad AF; itemque ex *m* A ad A*l*, & *m* A ad AG; hoc eſt rationibus quadrati *d* A ad rectangulum *c* AE, & quadrati *i* A ad rectangulum kAF, & quadrati *m* A ad rectangulum *l* AG &c.

SCHOLION I.

N*Otari poteſt, curvam EFG, quæ biſecat ſegmenta* dc, ik, ml *ex ſemidiametris intercepta inter tangentem, & curvam hyperbolicam, eſſe unum ex Conchoidibus hyperbolicis, de quibus agit P. Nicolas Soc. Jeſu in elegantiſſimo Tractatu de Conchoidibus, & Ciſſoidibus* exercit. 1. parte 4. *quemadmodum ſimilis curva EFG in figura ſuperius adducta* pag. 41. *de dimenſione Circuli, quæque biſecat ſimiles interceptas ex ſemidiametris inter tangentem, & peripheriam circuli (ut oſtenſum eſt* pag. 43. *) eſt pariter Conchois circularis à Nicomede propoſita; Unde liquet analogia inter præſentem Hyperbolæ, & illum Circuli tetragoniſmum, de quo loco citato agebamus.*

SCHOLION II.

S*I ad axem HC ordinarentur tales applicatæ, quæ ad abſciſſas à puncto H forent in ratione ſectoris ADIH ad ſectorem abſciſſum per ſemidiametrum in eodem puncto cum applicata ſecantem ipſam HC (quomodo applicata in C eſſet = CH, & applicata in K = dupla HK, applicata verò in L = quadrupla HL atque ita ſemper, prout ſector ADIH = AHID, ſed idem = 2 AHMI, necnon = 4 AHM &c.) tunc foret HC ad ultimam applicatam in puncto H, ut triangulum ACH ad* *sectorem hyperbolicum A D I H: esset enim A C H ad A H C, ut C H ad sibi æqualem applicatam in C; idemque A C H esset ad quadrilaterum A D K H (duplum trianguli A H* K ex ostensis



in hac prop.) *ut C H ad applicatam in* K *duplam* K *H; pariterque A C H foret ad multilaterum A D N L H quadruplum* [*ut supra vidimus*] *trianguli A H L, ut ipsa C H ad applicatam in L, quæ foret quadrupla L H; & sic semper continuata constructione; unde A C H ad sectorem hyperbolicum, in quem illa multilatera desinunt, foret ut H C ad applicatam in H, quam ex diametro H A resecaret curva nuper descripta. Idem etiam valet in circulari sectore, facta similis curvæ constructione ad puncta ejus tangentis: & hic quidem contingeret, dictam resectam à curva sic constructa, in puncto H ordinatam, æquari ipsimet arcui circulari H D, in hyperbola verò æquaretur differentia data cujusdam rectæ lineę, & arcus parabolicæ curvæ. Atque hic esto nostræ* De Quadratura Circuli, & Hyperbolæ *Dissertationis*

F I N I S.

AP-

APPENDIX I.

De methodo, Curvas innumeras, præsertim Parabolas, & Hyperbolas dimetiendi, & rectificandi, necnon Generali earundem expressione analytica per Seriem Infinitam.

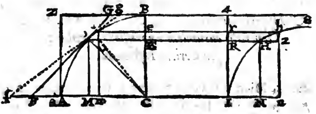
AMicorum votis morem gerens hanc etiam qualemcumque Meditatiunculam adiungo, licèt ab Argumento hujus Libri tantisper alienam, nisi in speculationum similitudine, ac demonstrandi modo præcedentibus affini, connexionem nonnullam inquiras; Etsi autem quæ nunc dicenda erunt pridem indicaveram *in Epist. Geom. ad P. Thomam Cevam Hugenianis adnexa num.* 17. occasione rectificationis Cycloidis, quam hac ipsa methodo exhibui, innuique id generatim circa innumeras alias curvas institui posse, visum tamen fuit specialiùs doctrinam illam applicare, & ad omnes Parabolas hic extendere, ut faciliùs deinceps, tum hanc, tum alias passim in nostris operibus occurrentes methodos promovere, ac particularibus exemplis illustrare Tyrones addiscant, ad Scientiæ hujus omnium Nobilissimæ, Jucundissimæque incrementum.

PRO-

PROPOSITIO UNICA.

Sit curva qualibet ADB, rectis ICA, 8BZ ad basim CB perpendicularibus intercepta, & ex quibuslibet ejus punctis D, d *actis DEH,* deh *basi pariter normalibus, nec non tangentibus FDG,* fdg *inter extremas perpendiculares terminatis, ponatur ubilibet EH aequalis FG,* eh *aequalis* fg, *quousque per puncta H,* h *sic determinata transeat curva IH*h.

*Dico, spatium curva IH*h, *rectisque IC, CB, B8 comprehensum aequari rectangulo basis CB in curvam ADB: item, portionem quamlibet IHEC aequari rectangulo ex eadem CB in correspondentem arcum AD.*



Intelligatur curvæ portio D*d* indefinitè parva, ut cum tangentis suæ portiuncula D*d* coincidere censeri possit, certè ut ab æqualitate propiùs absint, quam pro qualibet assignabili differentia, & una pro altera indiscriminatim usurpari queat *ex coroll.* 4. *prop.* 5. *De Infinit.* itaque, ob parallelas proportionaliter secantes interceptas FG, CB, erit illa ad hanc, ut D*d* ad E*e*, rectangulum igitur extremarum HE*e* æquabitur rectangulo mediarum CB in D*d*; Quod cùm ubilibet contingat, manifestum est, omnia rectangula, quæ per indefinitam sectionem basis CB adscribi possunt spatio hHICB8 (cujusmodi unum est

h*e*E2)

he E z) quæque ab ipso differre possunt minori differentia qualibet data, prout puncta D, d, seu E, e in infinitùm proximiora accepta fuerint, æqualia esse rectangulo basis CB in omnes curvæ portiunculas Dd, atque adeò spatium, curva IHb, rectisque &c. ut proposuimus.

COROLL. I. Si punctum A fuerit vertex curvæ, & AZ ejus tangens parallela, adeòque æqualis basi CB, utique & CI æquabitur CB, eritque ICB4 quadratum, quod ad spatium hHICB8 erit, ut basis BC ad curvam ADB, rectangulumque ICER ad spatium correspondens HICE erit, ut CE, vel ordinata MD, ad arcum AD. Aliàs describatur quadratum ipsius CB, quod sit CB4I, & eadem sequentur.

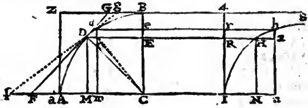
COROLL. II. Quoniam quadratum FG ad quadratum CB (vel HE, seu NC quadratum ad quadratum ER vel CI) est ut quadratum FD ad quadratum DM, erit dividendo (posita aC æquali CI) rectangulum aNI ad quadratum CI [seu differentia quadratorum HE, RE ad RE quadratum] ut quadratum subtangentis FM ad quadratũ ordinatæ MD, quod, ut mox patebit, ad naturam curvæ IHh in sequentibus expeditè determinandam aptissimè conducere potest.

COROLL. III. Speciatim igitur si ADB fuerit Circuli quadrans, erit spatium bHICB8 duplum ipsius, & portio quævis IHEC dupla sectoris correspondentis CDA, rectangula enim ex radio BC in curvam ADB, vel ejus arcum AD, quæ spatiis bHICB8, & IHEC respectivè æquantur, dupla sunt ex Archimede, vel *ex Coroll. 1. nostra Prop. 36. in Vivianea Problemata* totius quadrantis, aut sectoris correspondentis.

COROLL. IV. In hac eadem hypothesi patet, ordinatam E*H* æquari interceptæ à centro, & tangente axis portioni CF, cùm sit enim FG ad CB, ut FD ad DM, seu ut FC ad CD, ob æqualitatem consequentium CB, CD, æqua-

æqualia erunt & antecedentia FG, FC, ipsi autem FG æqualis est per constructionem EH. Quare &c.

COROLL. V. Notari etiam potest, spatium hHICB8 tunc provenire idem cum spatio figuræ quadranti correlatæ, de quo *in Hugenianis cap.* 8. *n.* 6. loquti sumus, nec ab illo differre, nisi varia linearum axi parallelarum applicatione, ibi scilicet à singulis peripheriæ punctis pendentium, hic directè ad correspondentia basis puncta depressarum, nam & rectæ *ao* (*in figura loco cit. exhibita*) æquantur distantiis centri ab occursu tangentis cum axe, ut hic ostensæ sunt EH æquales FC.



COROLL. VI. Spatium IHN duplum est correspondentis Trilinei FDA, nam & rectangulum CEHN duplum est trianguli FDC parem basim intra easdem parallelas habentis, & spatium IHEC duplum est, *per coroll.* 3, sectoris ADC, unde & residuum IHN reliqui FDA pariter duplum erit.

COROLL. VII. Imò quæcunque esset curva ADB, si juxta *Coroll.* 4. alia curva IH*b* ita illi responderet, ut semper ordinata EH esset æqualis FC distantiæ puncti fixi C ab occursu tangentis cum axe, tum Corollarium III. tum VI. locum haberent, nam ductis ex indefinitè proximo puncto *d* tangente *df*, & parallela ordinatæ *deb*, quoniam *Ff* differentia ipsarum FC interceptarum inter punctum fixum C, & occursum tangentis, semper æqualis erit H z,

vel

vel N *n* differentiæ ordinatarum E H ipsis C F æqualium, rectangulum *n* N H *z* duplum erit trianguli æquè alti F *f* D; quod cùm ubique eveniat, palam est, spatium I H N duplum fore spatii F D A, sed & duplum rectangulum CEHN trianguli æqualem basim in eadem altitudine obtinentis C D F; itaque & spatium I H E C duplum erit spatii ADC.

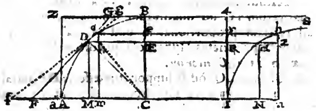
COROLL. VIII. At si curva A D B (positis iis quæ in propositione) fuerit Parabola quadratica, erit I H *b* Hyperbola ordinaria, cujus transversum latus *a* I, rectum verò tertia proportionalis post *a* I, & parametrum ejusdem parabolæ; nam quia semper F M est dupla A M, atque ut A M ad M D, ita hæc ad parametrum, duplicando rationes, sumptoque multiplici primi antecedentis, & æquè submultiplici secundi consequentis, erit F M q. ad M D q. (idest *per Coroll.* 2. rectangulum *a* N I ad quadratum I C) ut quadratum M D, vel N H ad quadratum semiparametri, & permutando, rectangulum *a* N I ad quadratum N H, ut quadratum I C ad quadratum semiparametri, sive ut *a* I ad tertiam proportionalem post *a* I, & parametrum, quæ est nota proprietas Hyperbolæ prædictis lateribus descriptæ *per* 21. 1. *Conicorum*.

COROLL. IX. Quòd si supponatur esse A D B parabola cubica, erit curva I H *b* Hyperboloides, cujus ordinatarum quartæ potestates, seu biquadrata, proportionentur rectangulis *a* N I, nam tunc F M est tripla A M, atque ut hæc ad M D, ita quadratum M D ad quadratum parametri, adeòque A M quadratum ad quadratum M D, ut biquadratum M D ad biquadratum parametri, & F M q. ad M D q. (seu *a* N I ad I C q.) ut biquadratum MD vel NH ad nonam partem biquadrati parametri; similiter, & convertendo, ostendetur I C q. ad *a n* I, ut nona pars biquadrati parametri ad biquadratum *n* h; ex æquo igitur rectangula *a* N I, *a n* I proportionantur N H, h *n* biquadratis.

COROLL. X. Eodem ratiocinio ostendetur, curvas I H h

L sem-

ſemper eſſe Hyperboloides aliorum graduum, quoties ADB ſit aliqua ex aliis infinitis parabolis, cujus ordinatarum potestates à quolibet exponente m denominatæ proportionentur abſciſſarum poteſtatibus ab alio quolibet exponente n indicatis, erit enim ſemper A M ad M D, ut poteſtas $[m - n] : n$ ipſius M D ad ſimilem parametri poteſtatem, adeòque A M quadratum ad quadratum M D, ut poteſtas $(2m - 2n) : n$ ipſius M D ad ſimilem poteſtatem parametri; cùmque F M ſit ſemper $m : n$ ipſius M A, erit F M quadratum ad quadratum M D (nempe rectangulum a N I ad quadratum I C) ut poteſtas $(2m - 2n) : n$ ipſius M D, vel N H, ad $nn : mm$ ſimilis poteſtatis parametri, adeòque ordinatarum N H poteſtates $(2m - 2n) : n$ ipſis rectangulis a N I proportionales ſimili ratione demonſtrabuntur; quod eſt, curvam I H h eſſe aliquam ex infinitis Hyperboloidibus ad diametrum I C comparatis.



COROLL. XI. Notatu dignum eſt, Hyperboloides ejuſmodi ſpatium abſolutè quadrabile aliquando comprehendere, & tum Curvas Parabolicas iis reſpondentes eſſe abſolutè rectificabiles; certè in parabola cubica ſecundi ordinis, ubi m valet 3, n valet 2, unde $(2m - 2n) : n$ valet $[6 - 4] : 2$, ideſt æquivalet unitati, rectangula a N I, ſeu differentiæ quadratorum HE, R E, erunt in ratione ſimplicium linearum N H, ſeu I R, ideòque curva I h H (concavitate versùs C B obverſa) erit portio quædam Parabolæ

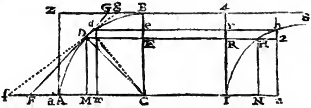
bolæ quadraticæ, per ordinatam IC à vertice obtruncatæ, ex notissima hujus parabolæ natura.

COROLL. XII. Pariter ubi ordinatarum Parabolæ ADB quintæ potestates corresponderent biquadratis, seu quartis potestatibus abscissarum; valor exponentis ordinatæ ad *Hyperboloidem* NH esset [10 — 8]: 4, idest 1 : 2; quod indicat, rectangula *a*NI fore in subduplicata ratione ordinatarum NH. Atque hoc genus *Hyperbolæ* jam ad mensuram vocavit illustris Geometra Stephanus De Angelis altera parte sui De Infinitis Spiralibus Inversis, Infinitisque *Hyperbolis* Libelli *Schol.* 3. *Propositionis* 3. ostendens rectangulum NIRH esse ad spatium IHN, ut quadratum NA ad 1 : 5 quadrati NI, cum 1 : 3 quadrati *a*I, & cum rectangulo CIN [quod consonat dimensioni mox ex aliis principiis afferendæ *Schol.* 1. *exempl.* 2.] quare & ejusmodi parabola rectificationem admittet.

COROLL. XIII. Imò generatim enunciari potest, quoties dupla differentia exponentium *m*, *n* metitur ipsum *n*, verbi causa per numerum *p*, semper curvam parabolicam ADB rectificari posse; erit enim $(2m - 2n) : n = 1 : p$ adeòque rectangula *a*NI in ratione erunt tam submultiplicata ordinatarum NH, quàm submultiplex $1 : p$ unitatis, ipsæque ordinatæ proportionales erunt rectangulorum illorum potestatibus ab exponente *p* indicatis, unde singula membra potestatis ejusmodi rectangulorum ducta in axem curvæ NI, & divisa per numerum dimensionum ejusdem NI singulis membris prædictis competentem, exhibebunt notam quantitatem rectis dumtaxat lineis definitam, quæ ad spatium IHN datam prorsus rationem habebit; Id quod semper contingere patet, quum *m* est numerus impar, & *n* par proximè minor; ut in duobus præcedentibus Corollariis; nam tunc $m = n + 1$, adeoque $[2m - 2n] : n = (2n + 2 - 2n) : n = 2 : n$, & si *n* numerus par $= 2p$, fit $2 : n = 1 : p$, ut supra diximus.

SCHOLION I.

Res clarior fiet exemplis analyticè expoſitis in hunc modum. Sit $IC = a$, $IN = x$, $NH = y$; quoniam ergo $2ax + xx$ proportionatur $y^{1:p}$, ſumi poterit velut ipſi æqualis (ſi nempe hic multiplicari, aut dividi intelligatur per conſtantem aliquam quantitatem unitatis loco ſumtam, ut dimenſiones ſuppleat) unde & æquè elevando utrumque terminum, erit $(2ax + xx)^p = y$, ſpatiique IHN elementum $ydx = [2ax + xx]^p\, dx$, quæ eſt quantitas facilè integrabilis, ductis ſingulis membris (loco differentialis dx) in x, ac per exponentem ipſius x unoquoque diviſo.



Exemplum I. In caſu corollarii 11. $p = 1$, itaque $ydx = 2axdx + xxdx$, cujus integrale $axx + x^3 : 3$ æquabit valorem ſpatii IHN.

Exemplum II. In caſu corollarii 12. $p = 2$, itaque $ydx = 4aaxxdx + 4ax^3dx + x^4dx$, cujus integrale eſt $4aax^3 : 3 + ax^4 + x^5 : 5 =$ ſpatio IHN.

Exemplum III. Si exponentes parabolæ ſint, $m = 7$, $n = 6$, erit $(2m - 2n) : n = 1 : 3$, unde $p = 3$; itaque $ydx = 6a^3x^3dx + 12aax^4dx + 6ax^5dx + x^6dx$, cujus integrale $= 3a^3x^4 : 2; + 12aax^5 : 5; + ax^6; + x^7 : 7 =$ ſpatio IHN.

Et, ſic in aliis pari progreſſu.

SCHOLION II.

EOdem ratiocinio infinitarum Hyperbolarum inter asymptotos positarum dimensionem reduces ad infinitas Hyperboloides iis, quas supra consideravimus, reciprocas, nempe quarum ordinatarum NH, nh potestates quælibet respondeant reciprocè rectangulis anI, aNI, quibus manifestum est asymptotos futuras rectas I4, IN, observabisque exponentem potestatum in ordinatis ad has Hyperboloides prædictis rectangulis reciprocarum esse fractionem $[2m + 2n]:n$, in qua scilicet duplum aggregatum exponentium coordinatarum ad asymptotos hyperbolæ datę denominatur per exponentem distantiæ ordinatæ à centro, ut simili calculo repetito constare posset, nisi jam pigeret antiqua vestigia iterum premere, nulla spe id Hyperboloidum genus aliquod saltem quadrandi nunc prælucente, ac laboris asperitatem alleviante.

SCHOLION III.

ITaque consultius erit ad seriem infinitam Curvæ longitudinem revocare, eritque Curva quælibet [cujus axis $= x$, ordinata $= y$, subtangens $= t$] æqualis integrali hujus seriei $dx; + ydy:2t; - y^3dy:8t^3; + 3y^5dy:48t^5$ &c. continuandæ *ut in Hugenianis pag.* 127. quæ quidem, determinata relatione curvæ naturam exprimente, sive ipsius t valore in terminis ab ipso y integrè affectis, integrari poterit. Exemplo sit Logarithmica, cujus subtangens eadem semper constans linea est, quæ pro unitate usurpata dabit integratam seriem $= x; + yy:4; - y^4:32; + y^6:96$ &c. $=$ longitudini Curvæ ipsis x & y correspondentis.

Quòd si infinitarum parabolarum parameter sit $= 1$, aut ℞ quadrati spatio asymptotico in quavis ex infinitis hyperperbolis inſcripti ſimiliter $= 1$, æquatione curvæ naturam exprimente $y^m = x$ [ubi per m quemlibet numerum ſignifico, poſitivum, aut negativum, integrum, fractumve, ut libuerit] ſubtangens erit perpetuò $= my^m$; itaque Parabolicæ, aut Hyperbolicæ cujuslibet Curvæ longitudo, ſive integrale primæ ſeriei evadet $= x; - 1 : [m - 2], 2my^{m-2}];$ $+ 1 : (3m - 4), 8m^3 y^{3m-4}); - 3 : (5m - 6), 48 m^5 y^{5m-6}]$ &c.

Vel etiam eadem infinitarum parabolarum, & hyperbolarum longitudo, ut dudum præſtitimus, reducetur commodè ad ſequentem ſeriem, ſcilicet $y;$

$$+ m^2 y^{2m-1} : [2, (2m - 1)];$$
$$- m^4 y^{4m-3} : (2 . 4, (4m - 3));$$
$$+ 3 m^6 y^{6m-5} : (2 . 4 . 6, (6m - 5));$$
$$- 3 . 5 m^8 y^{8m-7} : (2 . 4 . 6 . 8, (8m - 7));$$
$$+ 3 . 5 . 7 m^{10} y^{10m-9} : [2 . 4 . 6 . 8 . 10, (10m - 9)]$$

&c. ; itaut in Apolloniana Parabola, ubi $m = 2$, Curva fit æqualis $y; + 2y^3 : 3; - 2y^5 : 5; + 4y^7 : 7; - 10y^9 : 9; + 28y^{11} : 11$ &c. unde progrediendo quantumvis accuratam Curvæ longitudinem determinare licebit, acceptis rectarũ proportionalium y, y^3, y^5, y^7 &c. partibus ſupra expreſſis per ſubſtitutionem valoris ipſius m ex generali ſerie deductis.

Quod quidem Theorema cùm ſuperiori anno Egregio Juveni Gabrieli Manfredio ex more communicaſſem, Is & ad editionem me perhumaniter eſt cohortatus, & eleganti demonſtratione dignatus eſt confirmare, doctiſſimáque animadverſione, imò & nobiliorum Veritatum acceſſione illuſtrare: cujus Epiſtolæ fragmentum ad fidem iis, quæ dixi, conciliandam producere non verebor, ſingularem ejus mentis profunditatem, & in res meas humanitatem altero hoc ſpecimine teſtaturus, quamquam utriuſque veſtigiis aliquot, ne illi, mihique crearent invidiam, conſultò reſectis; nec enim deſunt qui laudes alienas in proprii contemptus argumentum convertant.

EX

EX ALTERA EPISTOLA

V. CL. GABRIELIS MANFREDII

Ad Auctorem scripta Bonon. 8. Augusti 1702.

. . . . *Transeo nunc ad subtilissimum illud Theorema tuum, quod mihi summo honore communicare dignatus fuisti. Ego syncerè fateor, & seriò hoc tibi maxima cum lætitia profiteor, quòd ex melioribus, & maximè utilibus totius Geometriæ adhuc inventis sit censendum --- Sanè Veritate ejus comperta, & Utilitate, quæ multa est, optimè perspecta, Tibi Vir Carissime, & Doctissime, omni officiorum debito devinctum me agnosco, quòd me præ cæteris hoc distinctionis gradu digneris, quo aliquid mihi gloriosius contingere posse non credam, ut siquidem Theorematis hujus Nobilissimi, cùm Laudes in omnium ore audivero (quod tunc accidet, cùm Publico illud impertitus fueris, ut autem citò citiùs impertiaris enixè supplico) illos me præcessisse, & ejus Pondus ante cæteros agnovisse possim gloriari.*

Tali autem ratiocinio Tuum *hoc Inventum confirmo. Esto æquatio* $y^m = x$, *undè* $my^{m-1}\,dy = dx$, *& curvæ elementum* $dy\sqrt{[1 + mmy^{2m-2}]}$ *est porrò* $\sqrt{[1 + mmy^{2m-2}]} = 1; + mmy^{2m-2} : 2; - m^4 y^{4m-4} : (2.4); + 3m^6 y^{6m-6} : (2.4.6); - 3.5m^{8m-8} : (2.4.6.8); + 3.5.7m^{10} y^{10m-10} : (2.4.6.8.10)$ *&c.* [*Sic Newtonus radices extrahit*] *quare ipsius Curvæ elementi erit series* $dy; + mmy^{2m-2}dy : 2; - m^4 y^{4m-4}dy : (2.4); + 3m^6 y^{6m-6}dy : [2.4.6]; - 3.5m^8 y^{8m-8}dy (2.4.6.8); + 3.5.7m^{10} y^{10m-10}dy : (2.4.6.8.10)$ *&c. cujus integrale, nempe ipsa curvæ* $y^m = x$ *longitudo, erit* $y; + mmy^{2m-1} : (2, (2m-1); - m^4 y^{4m-3} : [2.4,] 4m-3]; + 3m^6 y^{6m-5} : (2.4.6, (6m-5]; - 3.5m^{8m-7} : [2.4.6.8, [8m-7); + 3.5.7m^{10} y^{10m-9} : [2.4.6.8.10, (10m-9)$ &c.

Unde patet, ad hoc ut tua Analysis valeat, debere tantùm quan-

quantitates mmy^{2m-2}, *aut alias*, *quas earum loco debeas ex curva natura substituere*, *tales esse*, *ut omnes earum potestates in* dy *ducta sint integrabiles. Debent igitur curva*, *in quibus utilis esse potest tua series*, *ferè esse ex iis*, *in quibus indeterminatarum alterutra* x *sola unam aquationis partem constituere potest*, *reliqua aquationis parte ex quotvis terminis interim composita*, *in quorum singulis altera indeterminata ad quamvis potestatem elevata inveniatur*, *nullo insuper radicali signo*, *quod indeterminata ingrediatur*, *partem illam aquationis implicante*, *nec ullo insuper denominatore*, *quem indeterminata eadem ingrediatur*, *eandem aquationis partem afficiente; Talis esset curva*, *cujus aquatio foret*

$$x = (by^m + cy^n + y^p + ay^q \text{ \&c.}) : f$$

exponentibus m, n, p *&c. denotantibus quosvis numeros positivos*, *vel negativos*, *integros*, *vel fractos*, *rationales*, *vel surdos &c. Quales quidem curvas omnes quadrabilia spatia continere repereram. Si enim curva alicujus aquatio talis sit*, *qualem modò exposui*, $x = (by^m + cy^n$ *&c.*$) : f$, *hic valor indeterminata* x *erit tantùm per progressionem arithmeticam dividendus*, *cujus progressionis termini sint respectivè* m, n, p, q *&c. singuli unitate aucti*, *& talis ritè instituta divisionis quotiens erit per* y *multiplicandus*, *eritque productum spatium*, *quod axe* [*axe siquidem super quo ipsa* y *assumuntur*] *curva*, *& ipsa* x *continetur &c.*

Haud difficiliùs etiam invenies, *omnes tales curvas*, *quas quadrabilia spatia continere conclusimus*, *si super axem rotentur*, *super quo ipsa* x *assumuntur*, *solida efficere faciliter ad cylindros ejusdem basis*, *& altitudinis reducibilia*, *&c.*

Hactenus Vir Doctiss. cujus elegans generaliū quadraturarū Theorema sic vicissim libet analyticè ostendere. Quoniam $x = (by^m + cy^n + y^p + ay^q$ &c. $) : f$, erit $x\,dy$, elementum scilicet spatii, quod Acutissimus Juvenis considerat, $= (by^m\,dy + cy^n\,dy + y^p\,dy$ &c. $) : f$, cujus integrale, nempe ipsum spatium prædictum $= by^{m+1} : (mf + f)$; $+ cy^{n+1} : (nf + f)$; $+ y^{p+1} : (pf + f)$; $+ ay^{q+1} : (qf + f)$ &c. ut ipse pronunciavit,

vit, ejusque complementum æquabitur eidem seriei, singulis priùs terminis per suos exponentes m, n, p &c. ductis, nam elementum tunc est ydx, at differentiando primam æquationem curvæ constitutivam prodit $dx = [mby^{m-1}dy \dagger ncy^{n-1}dy \dagger py^{p-1}dy$ &c.$] : f$; quare $ydx = [mby^{m}dy \dagger ncy^{n}dy \dagger py^{p}dy$ &c.$] : f$; ejusque integrale $= mby^{m+1} : (mf \dagger f)$; $\dagger ncy^{n+1} : (nf \dagger f)$; $\dagger py^{p+1} : (pf \dagger f)$ &c.

Quod attinet ad solida ab his spatiis, qua parte ad axem x spectant, revolutis progenita, animadvertendum est, rationem solidi ex cujusvis figuræ rotatione resultantis ad cylindrum ejusdem basis, & altitudinis, eandem esse cum ratione summæ ex omnibus quadratis ordinatarum figuræ genitricis ad summam ex totidem quadratis linearum ultimæ basi æqualium, ut methodo indivisibilium docemur; porrò summa ex omnium ordinatarum y quadratis respectu axis x est ſ. $yydx$, sive, pro dx substituto ejus valore supra invento, integrale fractionis $[mby^{m+1}dy \dagger ncy^{n+1}dy$ &c.$] : f$; hoc est series $mby^{m+2} : [mf \dagger 2f]$; $\dagger ncy^{n+2} : [nf \dagger 2f]$ &c. summa verò ex totidem quadratis ipsi yy æqualibus est yyx, sive $[by^{m+2} \dagger cy^{n+2}$ &c.$] : f$; adeòque ad cylindros ejusdem basis, & altitudinis facilè reducentur hæc solida.

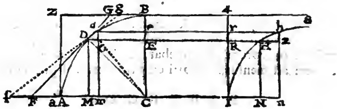
Hinc ex hac ratione solidorum auferendo rationem, supra expositam, spatii curvilinei solidum generantis ad rectangulum yx, quo cylindrus producitur, prodit ratio distantiæ ab axe centri gravitatis ejusdem spatii curvilinei ad semissem ordinatæ y, per quam distat centrum gravitatis dicti rectanguli ab eodem axe.

Subtangens cujuslibet ex talibus curvis, in axe x determinata, semper erit $= (mby^{m} \dagger ncy^{n}$ &c.$) : f$, ut constat substituto valore ipsius dx in generali subtangentis expressione $ydx : dy$; subnormalis verò in eodem axe accepta $= f : (mby^{m-2} \dagger ncy^{n-2}$ &c.$)$ quippequæ cum subtangente contineat rectangulum $= yy$: eademque methodo infinitæ aliæ quæstiones, ejusmodi curvarum genus concernentes, facillimam determinationem suscipiunt, imò crepundia sunt hæc nobilissimæ recentiorum analysis, cujus præstantiam vel ex hoc uno specimine satis intelligere possumus, ejusq. (immensè quantũ!) protensam utilitatem admirari; Nam de Infinitis Parabolis quot libros ab Acutissimis Geometris exaratos habemus? Jam illæ satis minimam, & infinitè exiguam hujus generis curvarum speciem constituunt, quatenus in parabolis dumtaxat uno membro æquatio expeditur, ejus etiam coefficiente $b : f$, utpotè superfluo, retracto, cæterisque terminis evanescentibus, ob coefficientes $= o$, nam per $x = y^m$ satis omnes parabolæ comprehenduntur, eritque ex hac generali doctrina spatium curvilineum circa axem $y = y^{m+1} : [m+1]$; complementum verò $my^{m+1} : (m+1)$, & hoc ad illud, ut m ad 1. Solidum ex rotatione circa axem x ad cylindrum ejusdem basis, & altitudinis erit, ut $m : (m+2)$ ad 1. Distantia ab axe centri gravitatis spatii hoc solidum rotundum describentis, ad semissem ultimæ ordinatæ y, ut $m : (m+2)$ ad $m : [m+1]$, sive, ut $m+1$ ad $m+2$, & sic de aliis; Quomodo autem pro Parabolis omnibus, ita & pro Curvis magis compositis, & duos, aut tres, quatuor, pluresve terminos importantibus ab ipsa y affectos, aliisque notis quantitatibus utcunque implicatos, elici possunt expressiones dictarum dimensionum ex una hac Clariss Juvenis animadversione, quippe eo fine terminorum numerus in altera æquationis parte indeterminatus relinquitur, ut quot quis voluerit opportunè respondeant, ibique sistere, aut ultrà promoveri, ubi, & quòusque opus fuerit, valeamus; nec enim hæ series infinitæ semper sunt (quamquàm & tales esse nil vetat) sed plerumque semet determinant, pro varia curvarum natura, ut dictum est, absolutamque spatiorum, & solidorum dimensionem renunciant finitis terminis explicabilem.

SCHO-

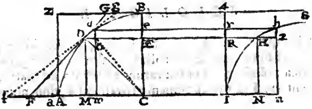
SCHOLION IV.

Denique monendus es, Mi Lector, quidquid in Propositione hac, & Corollariis eidem adnexis, illatum est circa rectificationem curvarum redactam ad spatii, per tangentium FG ordinationem provenientis, dimensionem,



potuisse aliis modis obtineri, exempli causa ponendo ipsas EH æquales portionibus rectarum ad curvam in D normalium, per duas AZ, CB parallelas interceptis, nam & spatium hinc proveniens 8BCIHh æquaretur rectangulo ipsius CA in curvam ADB, & portio quævis HICE rectangulo ejusdem AC in correspondentem arcum AD, nec differt demonstratio ab ea, quam dedimus in Propositione.

Aut generaliùs, si fiat constans quælibet linea, putà C*a*, ad EH, ut ordinata MD ad tangentem DF, vel ut subnormalis MC ad normalem CD, vel in alia æquivalenti ratione functionum curvæ ad punctum D spectantium, spatium hinc proveniens erit semper æquale rectangulo illius assumptæ constantis C*a* in curvam ADB, & portiones ejus æquales rectangulis ejusdem constantis in arcum sibi competentem; nec enim alia ratione jussimus in præcedentibus assumi EH æqualé tangentium, vel normalium partibus, inter parallelas AC, BZ, aut CB, AZ interceptis, nisi ut costans linea CB, vel CA esset ad EH in



dicta ratione, ideſt ut elementum ordinatæ dO, vel eE, ad elementum curvæ Dd, unde æqualitas rectangulorum infinitè parvorum proveniebat, redigens curvæ rectificationem ad menſuram ſpatii ex ordinatis EH provenientis.

PARERGON.

Hinc viciſſim patet, propoſito ſpatio quodam $CEHI$, poſſe determinari curvam ADd, cujus ope illud quadrari poſſit, etiamſi aliàs geometricæ quadraturæ ſit incapax; ut enim hoc ſuccedat (factis $CI = a$, $IN = x$, unde $EH = a + x$, CE, vel $MD = y$, & $AM = z$) oportet ſemper elementum dati ſpatii $ady + xdy$ *æquari elemento curvæ in conſtantem quantitatem ducto, nempe* $= a\sqrt{(dz^2 + dy^2)}$; *ergo dividendo per* a, *fiet* $dy + xdy : a = \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$, *& utrinque quadrando, erit* $dy^2 + 2xdy^2 : a + xxdy^2 : aa = dz^2 + dy^2$; *ablato communi* dy^2 *remanet* $(2ax + xx)\,dy^2 : aa = dz^2$, *ac demum* $\sqrt{(2ax + xx)}\,dy : a = dz$; *unde ſumma ſpatiorum, ex* $\sqrt{(2ax + xx)}$ *applicatis ad* y *æquatur rectangulo conſtantis* a *in quæſitam* z; *Quare prodit talis conſtructio: differentia quadratorum ordinatæ EH in dato ſpatio, & conſtantis ER, ſit* uu, *& applicatis ipſis* u *in E, ſpatium inde proveniens dividatur per* a; *quotiens erit* z, *ſive AM quæſita, cui ordinando $MD =$ datę* y, *reſultat curva AD, quæ multiplicata per* a *dat dimenſionem propoſiti ſpatii.*

AP-

APPENDIX II.

De methodo transformandi curvas tum superficies, tum lineas in alias diversæ speciei, idque infinitis modis.

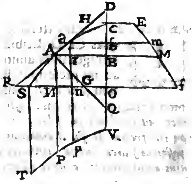
IN iisdem litteris pluries supra commemoratis, quas Cl. D. Leibnitzius occasione libelli hujus tetragonistici anno 1705. 21. Julii Hanoveræ ad me prescripsit, Problema quoddam propositum jam à D. Joanne Bernoullio mihi benignè communicavit his verbis. *Postremò ad profectum scientiæ pertinet, ut methodos per solutionem Problematum exerceamus. Sic non ita pridem D. Jo. Bernoullius proposuit hoc Problema: dato (positione) arcu Curvæ, invenire aliam curvam infinitis modis, cujus arcus aliquis, à nobis assignandus, arcui dato sit æqualis; & ita ut posito, datam curvam esse Algebraicam, etiam quæsita sit Algebraica: quod à me est solutum diversa methodo ab ea, qua ipse est usus.*

Multiplicem hujus Problematis solutionem, tum D. Lorenzino communicavi (qui & ipse idem multò generalius solvere aggressus est, nam quæsitam curvam in data ad propositam curvam ratione construxit) tum eidem D. Leibnitzio statim transmisi, sed an Epistolæ, ex tam distantiũ locorum intervallo, ad ejus manus tutò pervenerint, rescire non potui. Hanc ergo solutionem meam huic libello adiungere visum fuit, præmissis etiam nonnullis maximè generalibus Theorematibus, ad transformationem curvilineorum spatiorum in alias areas diversæ speciei spectantibus, nec enim ab argumento nostro prorsus aliena sunt,

sunt, & ad pleniorem enunciati Problematis solutionem valde conducunt. Horum quidem nonnulla etiam apud Cl. Barrovium invenies, sed absque demonstratione proposita; itaque operæ pretium fuit, ut eadem simul cum nostris collecta, & ex præclara methodo infinitè parvorum geometricè demonstrata tibi, benigne Lector, offerrem.

THEOREMA I.

Data qualibet figura CASO, si ejus coordinata AB, AN ita extendantur in M, P, ut BM ad NP sit in ratione ordinata AB ad subtangentem BD, quæ hinc oriuntur areæ CEFO, SOVT, & quælibet ipsarum partes correspondentes CEMB, VONP perpetuò æquabuntur.



Nam ductis infinitè proximis *abm*, *anp* ad priores coordinatas parallelis, erit N*n* ad B*b*, ut AI ad I*a*, sive ut AB ad BD, hoc est ut BM ad NP, & rectangula extremarum *n*NP, & mediarum *b*BM perpetuò æqualia erunt; quare & areæ elementares N*np*P, B*bm*M (quę *per coroll. 3. prop. 5. de Infin.* his rectangulis infinitè parvis congruunt) invicem æquabuntur; unde constat propositum.

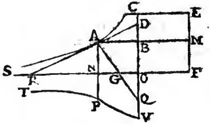
COROLL. I. Idem sequeretur, si BM ad NP (extensa tangente DAR, & ducta huic normali AQ quæ perpendiculariter curvam secat in A) fieret ut subnormalis BQ ad ordinatam BA, vel ut ipsa normalis QA ad tangentem AD, vel ut RN ad NA, vel ut NA ad NG &c.

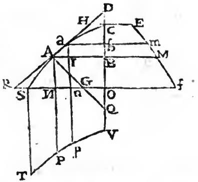
om-

omnes enim istæ rationes, ob triangulorum similitudinem, æquantur dictæ rationi ordinatæ AB ad subtangentem BD.

COROLL. II. Hac methodo facile est datam quamlibet figuram CEFO in alias infinitas, specie, & genere differentes transformare, salva arearum æqualitate: prout scilicet alia CASO assumpta fuerit ex qualibet parabolarum, hyperbolarum, conchoidum, cissoidum, spiralium, aliarumque infinitis modis variabilium curvarum specie, juxta cujus ordinatarum, & subtangentium rationem fiat quævis ordinata BM datæ figuræ ad aliam NP figuræ quæsitæ; quin etiam poterit assumpta curva CAS vel concavitatem, vel convexitatem obvertere angulo COS, & basim habere vel infinitam, vel finitam, & determinatam, prout placuerit, ut quæsita figura proveniat majori, aut minori, vel infinito etiam axi OS adiacens, vel binis etiam asymptotis SO, OV interposita; continget quippe etiam OV infinitam evadere, si CO fuerit tangens curvæ CA, & prima ordinata datæ figuræ CE sit finitæ quantitatis, quia cùm [*ex prop.* 5. *de Infinit.*] intercepta inter tangentem, & curvam sit infinitè minor differentia ordinatæ, fiet ad punctum C ratio ordinatæ ad subtangentem, adeoque & ratio CE ad OV infinitè exigua, quare OV erit infinitè major quàm CE.

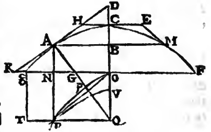
COROLL. III. pariter licebit dato trapezio, vel quadrato CEFO aut alteri curvilineo notæ mensuræ, figuras curvilineas æquales, adeoq absolutè quadrabiles invenire, vel undiq. circumscriptas, & determinato axi SO adiacentes, vel asympto-





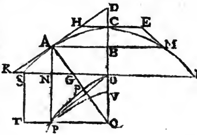
ptoticas, & in infinitum, five ex utraque, five ex altera tantû parte excurrentes; idque innumeris modis.

COROLL. IV. Vicissim propositis quibuslibet figuris CEFO, SOVT notæ mensuræ, si ex ipsis æqualia spatia CEMB, NOVP resecentur, & ordinatæ MB, PN conveniant in A, erit curvæ hinc provenientis SAC ordinata AB ad subtangentem BD (vel subnormalis QB ad ordinatam BA) in data ratione ipsius BM ad NP, nam ex æqualitate rectangulorum infinitè parvorum M B *b m*, P N *n p*, fit BM. NP :: N *n*. B *b* :: AI. *a*I :: AB. BD *ex coroll.* 2. *prop.* 5. *De Infinit.* ubi ostensum est, esse ordinatam ab subtangentem, ut differentia ordinatæ ad differentiam axis.



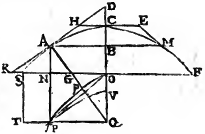
COROLL. V. Si curva CMFO fuerit eadem cum CASO ad alteram axis partẽ replicata, curva O*p*P evadet figura ex subtangentibus BD applicatis in NP, quam alteri figuræ Correlatam [*in Hugenianis cap.* 8. *n.* 5.] nuncupabã, quia cùm sit AB. BD :: BM. NP, si antecedentes, AB, BM æquantur, oportet æquales esse & consequentes BD, NP; itaque ex multò magis generali principio Correlatarum æqualitas pendet.

CO-



COROLL. VI. Si ordinatæ B M in figura CEFO æquentur ſubnormalibus B Q figuræ C A S, curva V P vel O P tranſit in rectam O P, quæ ad angulum ſemirectum baſi O S inclinatur; nam *ex Coroll.* 1. BQ.BA :: BM. NP, unde quia BQ = BM, etiam B A, ſive O N = N P, & ideo N O P triangugulum eſt iſoceles rectangulum, ſive dimidium quadrati N O vel A B; adeoque figura C E F O ex ſubnormalibus orta erit quadrabilis, & ratio totius ad partem C E M B eadem probabitur, quæ ratio quadratorum ab ordinatis SO, A B.

COROLL. VII. Itaque data qualibet figura C E M F O, ſi conſtrui poſſet altera C A S O, cujus ſubnormales B Q æquales evaderent ordinatis B M, haberetur illius dimenſio, nam portio quævis C E M B æquaretur dimidio quadrati B A, ideſt triangulo N O P; ſed talis curvæ conſtructio ex data ſubnormalis proprietate generatim perfici nequit abſque quadraturis; neque remedium à Cl. Craigio *in meth figur. probl.* 1. & 2. allatum [præterquam in parabolicis, & hyperbolicis, ſive univerſim in iis curvis, quarum ſubtangentes ad abſciſſam axis ſunt in conſtanti ratione) felicem exitum habere poteſt. Docet nempe Vir acutiſſimus, quod ſi B M $= y$, B C $= x$, & invenienda ſit ordinata B A $= z$, itaut ſubnormalis curvæ C A S, in quam terminant ipſæ z, fiat $= y$, conſiderando ſubtangentem B D, quæ ducta in ſubnormalem BQ dat DBQ = quadrato B A, & fingendo eam ſubtangentem $= mx$ (quod erit, ſi x, ideſt C B, fuerit ad ſubtangentem B D in ratione 1 ad m) eliciendo æquationem $mxy = zz$, ex qua inveniendo ſubnormalem $z\,dz : dx$, & comparando valorem inventum cum ipſa y, innoteſcit incognitæ litteræ m valor, adeoque fit cognita æquatio $mxy = zz$; ſed quia ubi m fuerit indeterminata, prodit æquatio differentialis involvens, præter dz, & dy, ac dx cognitas, etiam dm prorſus incognitam, & ad alias irreducibilem, patet nihil inde ſubſidii haberi poſse extra ſpeciales caſus in quibus m fuerit conſtans & determinata, quia tunc novam differentialem non invehit, quæ calculum turbet; & ideò tangentium methodus inverſa generatim quadraturas ſupponit, unde non eſt ſperandum, ut viciſſim per hanc inverſam methodum quadraturæ figurarum in univerſùm abſolvantur.



COROLL. VIII. Si rectæ NP eidem conſtanti OQ æquales fuerint, ut loco figuræ NOVP proveniat rectangulum SOQT, erunt ſpatia OCEF, BCEM proportionalia ordinatis SO, AB, ut potè æqualia rectangulis ſub eadem OQ, & ſub ipſis SO, & ON vel BA contentis; & differentiæ ſpatiorum BCEM, hoc eſt lineę BM, proportionales fient differentiis ordinatarum BA, ac denique differentiæ primæ ipſarum BM, ſive (retentis ſymbolis ſupra poſitis) ipſæ dy, erunt proportionales differentiis ſecundis ordinatarum BA, ſcilicet ipſis ddz; Unde ſolvitur maximæ utilitatis Problema, quærendi curvam EMF, cujus ordinatæ BM ſint ut differentiæ ordinatarum datæ CAS, adeoque & cujus primæ differentiæ dy proportionentur ſecundis alterius differentiis ddz, faciendo ſemper, ut ſubtangens BD (quam voco s) ad ordinatam BA, nempe z, ita conſtans OQ, ſive a ad $az : s$, quæ æquabitur BM, ſive y quæſitæ.

SCHO-

SCHOLION.

DEscendendo ad speciales cujuslibet curvæ naturas, innumera alia jucunda Theoremata hinc orirentur, quæ lectoribus meis, ad exercendam geometricam methodũ, exponenda relinquo; idemq. in sequentibus observabo.

THEOREMA II.

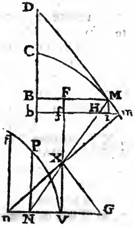
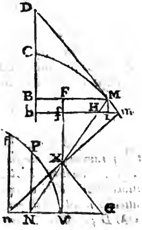


FIgura *CM*m b, *VP*p n *ita referantur, ut per fixum punctum* X *juncta qualibet MX, secante positione datam VN ordinatis MB parallelam in N, ductaque* X G *tangenti MD parallela, necnon ad ipsas BM, NV demissa per X perpendiculari F* X *V, fit semper N* G. X *F* :: *BM. NP; erunt areæ CMB, VPN perpetuò æquales.*

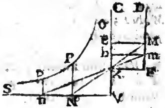
DUcta enim infinitè proxima *n* X *m*, & ordinatis *np*, *mb*, quarum hæc secet priorem NXM in H, ductaque M I ad ordinatas perpendiculari, erit *n* N. *m* H :: *n* X. X *m*, sive [ob infinitè parvam differentiam, quæ *per coroll.* 2. *prop.* 3. *de Infinit.* non alterat proportionem] :: N X. X M :: V X. X F; at verò *m* H. *M* I :: N G. X V (ob similitudinem triangulorum M *m* H, N G X) ergo ex æquo perturbatè *n* N. M I :: N G. X F :: B *M*. N P *ex constr.* ideoque rectangula P N *n*, M B *b* perpetuò æquantur; unde liquet propositum.

COROLL. I. Si punctum X fuerit in axe C B, tum coincident puncta B, & F, & linea XF fiet XB, & expeditior evadet conſtructio.

COROLL. II. Pro vario ſitu puncti X, quod vel citra, vel ultra axem, vel in axe, vel in perimetro figuræ, vel intra ipſam, vel ſupra, vel infra ſumi poteſt; necnon pro varia diſtantia rectæ V N ad eodem fixo puncto X, variatur ſpecies, & forma figuræ V P N, manente ſemper ejus æqualitate cum ipſa C M B, quæ ideò infinitis modis in alias, & alias æquales figuras etiam per hanc methodum poterit transformari.



COROLL. III. Si linea Mm recta fuerit axi parallela, tum recta X G coincidet cum X V, eritque ſolùm N V . X B :: B M . N P, & curva Pp erit hyperbola quadratica, nam facta X V $= b$, & B M $= a$, & V N $= z$, fit X B = quartæ proportionali poſt z, b, & a (ob ſimilia triangula N V X, M B X), adeoque B X $= ba : z$; eſt autem ex curvæ Pp conſtructione V N, ſcilicet z ad X B, nempe $ba : z$, ut B M ad N P; ergo hęc $= baa : zz$, & ideo $zz . aa :: b$. N P; ſeu quadrata abſciſſarum N V, V n ſunt reciprocè ut ordinatæ np, N P; itaque hinc etiam habetur, infinitè longum ſpatium PpSnN eſſe finitæ dimenſionis, & æquari rectangulo X F M B; reliquum verò O P N V B = infinitæ areæ rectanguli interminati C B M D; & rectanguli P N V, pn V

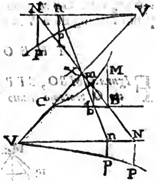


erunt

erunt ad invicem, ut BX, *b*X, sive ut rectangula XBM, X*bm*, quibus æquantur.

COROLL. IV. Erit tamen asymptotus VO hyperbolæ *p*P infinities major altitudine infinita XC parallelogrammi interminati XD, quia cùm sit permutando NV. BM :: XB. NP, ubi NV fit infinitè parva, & manente constanti BM, ipsa XB migrat in absolutè infinitam XC, tunc NP, quæ jam evadit eadem cum asymptoto VO, est quarta proportionalis post easdem; ideoque ut NV est infinitè minor BM, ita infinita XC fit infinitè minor asymptoto VO; quare hæc est plusquam infinita respectu illius. Vide dicta *in tract. de Infin. prop. 8. n. 4. & alibi*.

THEOREMA III.

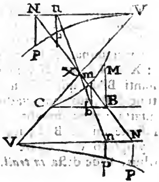


Curvæ C*m*M, *V*p*P ita invicem referantur, ut ex fixo puncto* X *sumpto in recta V*C, *quæ vertices utriusque conjungit, & inclinata qualibet* X*B*N, *secante utriusque axes parallelos in punctis B, N, fit semper ordinata B*M *ad ordinatam* N*P, ut reciprocè V*X *ad* XC. *Dico, areas* C*MB, VPN semper æquales fore*.

Agatur enim infinitè proxima X*bn*; atque ordinentur *bm*, *np*; igitur ob similitudinem triangulorum, erit N*n*. B*b* :: NX. BX :: VX. XC :: BM. NP *ex constr.* ergo rectangula extremarum, & mediarum æquantur, scilicet spatiolum PN*np* = spatiolo MB*bm*, unde patet utriusque areæ æqualitas; Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc pariter, pro vario situ puncti X, & linea-

linearum CB, VN distantia, diversæ constructiones arearum VNP datæ cuidam CMB æqualium haberi possunt, non tamen semper diversi generis.

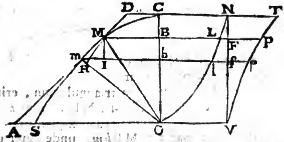


COROLL. II. Etiam rectangula CBM, VNP his areis circumscripta semper invicem æqualia fient, propter BM.NP :: VX. CX :: VN.CB, unde liquet rectangulorum ab extremis, & mediis factorum æqualitas.

COROLL. III. Proinde hinc deducitur, permutando, eandem semper futuram rationem areæ CMB ad circumscriptum rectangulum CBM, quæ est areæ VPN ad circumscriptum rectangulum VNP.

THEOREMA III.

Figura CMSO, CTPVO ita referantur, ut ex fixo puncto O protenso ramo OM, ordinataque MBP, ductaque



tangente MA, sit semper BP = medietati ipsius OA, erunt area CMO, CTPB perpetuò æquales.

Ex

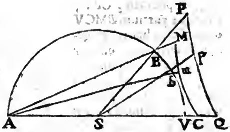
Ex puncto m infinitè proximo ordinetur mbp, jungatur autem mO, & agantur in ipsas mO, mb perpendiculares MH, MI: erit MI sinus anguli mMI, sive interni, & oppositi parallelarum MAO; sed MH erit sinus anguli MmO, vel ejus consequentis AmO, aut (ob infinite parvam utriusque differentiam mOM nihil æqualitati derogantem *ex prop. 7. de Infin.*) ipsius AMO; sunt autem sinus angulorum MAO, AMO, ex Trigonometria, ut MO ad OA, vel ut dimidia MO ad dimidiam OA, sive ad BP, ergo MI, seu Bb ad MH est ut dimidia MO ad BP, & ideò rectangulum extremorum bBP = rectangulo mediorum, scilicet dimidiæ MO in MH, hoc est sectori MOH, vel triangulo MOm; & hoc semper; Quare &c.

COROLL. I. Congruit hoc demonstratis supra *in Coroll. 7. prop. Appendicis* 1. quamquam alia methodo, & in figura ex duplis ordinatis facta id ostenderimus.

COROLL. II. Si figuræ CMSO tangens in C sit basi OS parallela, fiet CT asymptotus figuræ OVP, ut potè = 1 : 2 ipsius OA, quæ tunc infinita evasit.

THEOREMA V.

Area ACM, SQP ita referatur, ut radio SA descripto semicirculo ABV, secante ramum AM in B, & juncta SBP, sit semper AM potestate dupla ipsius SP: Dico areas AMC, SPQ æquales esse.

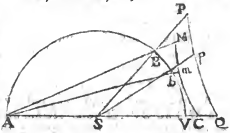


[*debet autem* Sp *per punctum* b *transire, in quo* Am *semicirculum secat*]

Facta

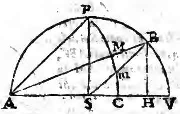
FActa solita constructione infinitè proximarum A b m, Sbp; quoniam sectores infinite exigui, qui spatiis A M m, S P p, quibus adscribuntur, congruunt (*ex prop. 5. De Infin.*) rationé habent compositam ex ratione quadratorum à radiis A M, S P, & angulorū M A m, P S p; in hoc autem casu hæ rationes sunt reciprocæ, quia angulus *B* S b ad centrum duplus est anguli *B* A b ad circumferentiam, ut vicissim, *ex construct.* supponitur quadratum A M duplum quadrati S P: manifestum est hinc prodire rationem æqualitatis, adeoque semper M A m = P S p; Quod erat &c.

[debet autem Sp per punctum b transire, in quo Am semicirculum secat]



CoROLL. I. Datæ figuræ A C M æquales innumeras hac methodo assignare licet, electo ad arbitrium puncto S in majori, aut minori distantia à fixo puncto A, descriptoque semicirculo radii S A, & completa constructione, quam Theorema præscribit, unde semper diversa prodit figura.

CoROLL. II. Hinc Lunulę Hypocraticę CPV, cujusque partium *B*MCV dimensio ex hac magis generali affectione pariter deducitur; Nam cùm sint semper radii A P, A *M* sectoris A P C dupli potentia radiorum S P, S *B* sectoris P V S, erit *ex hoc theor.* A P C = P S V, & ablato communi S P C, fit A P S = semilunulæ C P V; item quia



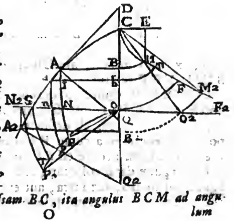
eodem

eodem ratiocinio A *M* C = S *B* V, dempto communi S *m* C, & addito utrinque *M m B*, fit A *B* S = *M B* V C; Unde amplius ducta perpendiculari *B* H, patet fore totam C P V ad partem C *M B* V :: P S . *B* H, in altitudinum scilicet ratione, in qua sunt etiam triangula A P S, A *B* S ejusdem basis A S.

COROLL. III. Si loco semicirculi (*vide fig. 1. adversa pag.*) alia curva A *B* V supponatur, in qua ex focis A, S inclinatæ lineæ ad quodvis perimetri punctum *B* faciant semper angulos, internum S A *B*, & externum *B* S V, in data ratione *n* ad *m* (quales quidem curvas olim construendas mihi proposuit Doctiss. P. Thomas Ceva Soc. Jesu, ut videre est in meo Tractatu *De novis lineis Curvis*) tunc si vicissim S P q., A M q. sint in eadē ipsa ratione *n* ad *m*, areę AMC, SPQ magis generali constructione ęquales resultabūt.

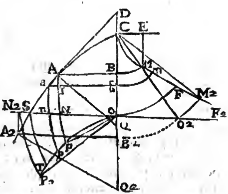
COROLL. IV. Quocirca, pro varietate assumptæ Curvæ A B V, licebit innumeris modis dato spatio A M C æqualem rursus aream S P Q exhibere.

THEOREMA VI.



Tres figuræ CASO, CMFO, atque OPTS ita referantur, ut ductis ubilibet coordinatis prioris figuræ AB, AN, & perpendiculari AQ ad curvæ tangentem AD, centris autem C, O descriptis circularibus arcubus BM, NP, ac junctis subtensis CM, OP, sit semper, ut subnormalis QB ad abscissam BC, ita angulus BCM ad angulum

lum NOP: erunt areæ CBM, ONP perpetuò æquales.



Sumpto quippe ipsi A infinitè proximo puncto *a*, factaque eadē constructione coordinatarum *ab*, *an*, & arcuum *bm*, *np*: cùm sit arcus BM ad ad NP in ratione composita ex ratione anguli BCM ad angulū NOP [hoc est, *per construſt.* QB ad BC] & ex ratione radii BC ad radium ON, vel BA, erit arcus BM ad NP, ut QB ad BA, sive (ob similitudinem triangulorum) ut *a*I ad IA, hoc est ut N*n* ad B*b*; facta igitur extremorum, & mediorum multiplicatione, erit zona B*bm*M = zonæ N*np*P, & sic semper; propterea etiam integrę areæ supradesignatæ æquabuntur. Quod erat &c.

COROLL. I. Etiam hinc infinitis modis poterit nova figura OPN datæ CMB æqualis assignari, prout diversa curva CAS assumetur, diversam habens subnormalem QB, ex cujus ad abscissam CB ratione pendet angulorum BCM, NOP relatio.

COROLL. II. Quinimò iterum infinitis modis variari potest curvæ OP*p* constructio, pro varia positione puncti C, quod distantiam ab ordinata BA diversam reddere potest, adeoque & arcuum BM diversum radium constituere, nec enim necesse est dictorum arcuum centrum in vertice figuræ datæ collocari, sed eligi potest, aut alibi in figuræ perimetro, aut intra, aut extra, nec refert, utrum concavum, an convexum talium arcuum basim respiciat,

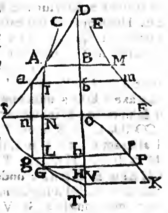
modò

modò fint concentrici, cùm nihil horum deroget prçoftentæ figurarum æqualitati.

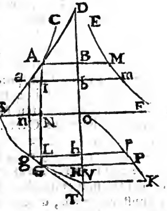
COROLL. III. Prætereà non eft neceffe, ut figuræ, quæ comparantur, in arcus ipfos O F, vel S T defin ant, fed etiamfi figuræ O C M bafis exempli gratia fuerit recta OF_2 five finita, five infinita, poteft nihilominus continuari conftructio figuræ N O P hoc modo. Inclinata ubilibet linea CM_2, defcriptoque arcu $M_2 B_2$, occurrente bafi prædictæ in O_2, jungatur CO_2, atque ordinata ad figuram CAS infra continuatam (vel aliam quamlibet SA_2 ejus loco ibi defcriptam) recta $B_2 A_2$, atque educta ex puncto A_2 recta $A_2 N_2$ ad axem parallela, recta verò $A_2 Q_2$ ad curvam perpendiculari, fiat femper, juxta Theorematis conftructionem, ut $Q_2 B_2$ ad B_2 C ita ang. $O_2 C M_2$ ad ang. $N_2 O P_2$, cui fubtenditur arcus $N_2 P_2$.

THEOREMA VII.

Quatuor figuræ CASO, VGSO, EMFO, VKPO ita invicem referantur, ut ducta intra duas priores qualibet AG axi BH parallela, ordinatifque ufque ad pofteriores rectis ABM, GHP, factifque AD, GT priorum tangentibus in A, & G, fit ubique ut fubtangens TH ad fubtangentem BD, ita ordinata BM ad ordinatam HP: erunt area KVHP, EMB perpetuò æquales.



Facta conftructione infinitè proxima per lineas *magp*, erit TH ad BD (nempe, *ex conftruct.* BM ad HP) in ratione compofita ex TH ad



HG vel AB, & ex AB ad BD; at prior ratio eadem eſt, quæ Hh, ſive GL, ad L*g*, vel I*a*, ſecunda verò eadem quæ I*a* ad ad AI vel B*b*, ex quibus reſultat ratio Hh ad B*b*; ergo BM. HP : : Hh : B*b*, ideoque ſpatium MB*bm* = PHh*p*, atque hoc ſemper; unde conſtat propoſitum.

COROLL. I. Hinc nedum pro varia curvæ CAS natura, ſed & pro varia ſpecie alterius curvæ SGV, infinitis modis variari poteſt conſtructio areæ VKPH datæ cuidam EMB æqualis.

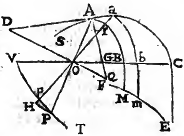
COROLL. II. Si pro curva SGV ſubrogaretur recta ad angulum ſemirectum inclinata ST, quia ſubtangens TH ſemper æquaretur ipſi HG, vel BA, tunc conſtructio hujus Theorematis conveniret cum conſtructione Theorematis primi, quod propterea unum tantùm ſpecialem caſum hujus ſeptimi conſtituit, tametſi generaliſſimum illud videretur: id tantùm diſcriminis intercederet, quòd ſitus figuræ *K*VHP illam non baſi OS adiacentem ſtatuit, ſed ſecus axem DO productum collocat, tametſi eadem prorſus & numero, & ſpecie utrobique reſultet.

COROLL. III. Si figura EMB fuerit eadem cum CAB, ad alteram ſcilicet axis partem replicata, quoniam tunc BM = BA = HG, erit TH . BD : : GH . HP; & AB*ba* = MB*bm* = PHh*p*; unde datæ cuilibet figuræ CAB æqualem VKPH aſſignabimus hac alia conſtructione: eligatur figura quælibet SGV, & ducta AG axi BO parallela, necnon utriuſque curvæ tangentibus in A, & G, quæ ſint AD, GT, fiat ubilibet TH . BD : : AB, vel GH . HP;

erit-

eritque spatium $CAB = VKPH$; idque infinitis modis variabitur, pro varietate assumptæ figuræ SGV.

THEOREMA VIII.

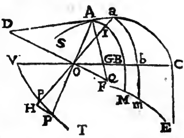


Curvarum CAS, VPT, EMF ea sit proprietas, ut ex quodam fixo puncto O educto ad primam curvam ramo AO, secante secundam in P, ductaque tangente AD, occurrente ipsi OD, quæ perpendicularis est ramo AO, in puncto D, descriptoque arcu circulari AB, centrum O respiciente, atque ordinata ad posteriorem curvam BM, sit semper rami AO quadratum ad rectangulum subtangentis OD, & rami OP, ut medietas rami OP ad ordinatam BM: erunt areæ CEMB, OPV perpetuò æquales.

Facta infinitè proxima constructione, quam repræsentat figura; quoniam quadratum AO ad rectangulum DOP est in ratione composita ex ratione AO ad OD, idest aI, sive Bb ad AI, & ex AO ad OP, hoc est AI ad PH, quæ duæ rationes componunt rationem Bb ad PH, erit ergo Bb ad PH, ut medietas rami OP ad ordinatam BM, & rectangulum $MBbm =$ rectangulo ex 1 : 2 OP in PH, idest sectori OPH, vel OPp. Ex quo constat propositum.

COROLL. I. Hinc infinitis modis, data alterutra figurarum $CEmM$, & VpP, altera invenitur, pro diversitate Curvæ assumptæ CA.

COROLL. II. Quia quadratum AO = rectangulo subtangentis DO in subnormalem OQ, erit etiam DOQ ad DOP,



DOP, ideſt QO ad OP, ut medietas OP ad BM, & rectangulum ex OQ in BM = dimidio quadrati OP; Quare ſi etiam juxta hanc rationem exprimatur propoſitarum figurarum relatio, ſubſiſtet correſpondentium arearum æqualitas.

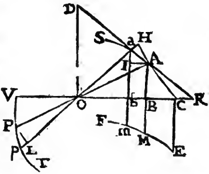
COROLL. III. Si rami OP ſint æquales ſubnormalibus figuræ SAC, hoc eſt ipſis OQ, erit MB = dimidiæ OQ; ſin verò BM = OQ, vel OP, erit figura BCEM dupla ſectoris OPV, ſed curva EMF = curvæ VPT; quia cum ſit $aI.IA::AO.OD::OQ$ (ſeu PO). $OA::PH.IA$, fiet aI, ſeu $Bb = PH$; cùm ergo & differentia ordinatarum MB in tali caſu æquetur Hp differentiæ ramorum OP, manifeſtum eſt, elementum curvæ Mm (potentia æquale tum differentiæ ordinatarum, tum differentiæ axis Bb) = elemento curvæ Pp [quod poteſtate æquatur utrique Hp, HP], quare & integræ curvæ æquabuntur.

COROLL. IV. Hinc obiter datæ figuræ VPO, in punctum convenientibus ramis comprehenſæ, poſſumus competentem figuram CEMB prioris duplam, ſed eadem curvæ longitudine ſervata, per ramos eoſdem in totidem ordinatas BM invicem parallelas expanſam aſſignare, aut viciſſim data hac expanſa illam involutam per ramos in commune centrum abeuntes exhibere; hoc enim habetur, inveniendo talem curvam CAS, cujus ſubnormales OQ æquent ſive ramos, ſive ordinatas datę figuræ; Pro quo, fiat conſtans quædam OB, ad libitum aſſumpta = a, & arcus BI, radio OB deſcriptus = z; ſit autem data Op, vel $bm = y$; Si ex figura convoluta OVP queritur expanſa CEM, intelligantur omnes rami OP, Op erigi in punctis

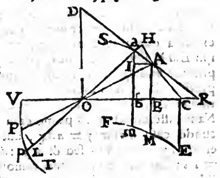
ctis correspondentibus A, I arcus BA, & superficies hinc orta, quæ erit $\int . ydz$, applicetur ad datam a, prodibit in quotiente longitudo Oa, vel OA determinans puncta Curvæ CaA, unde arcubus ab, AB descriptis, ordinatisque bm, BM dabitur expansa EmM; Sin vero ex data expansa quæratur convoluta, ponatur $Ob = x$ & facta ipsi EmM figura reciproca, cujus ordinatæ $= aa:y$, applicetur ejus spatium, nempe summa ex $aadx:y$, ad a; prodibit longitudo arcus z, puta BI, per quem extendendo ramum Ob, & in hoc sumpto $Op = bm$, fiet convoluta CpP; Nam differentiando in primo casu erit $ydz = adx$; in secundo casu $aadx:y = adz$, aut ut antea $adx = ydz$; ergo $a.y :: dz . dx$; sed & $a.y :: dz . PH$; ergo $PH = dx = Bb$; unde ob æqualitatem ramorum OP, & ordinatarũ BM, curvæ ipsæ VP, EM æquantur. Vide dicenda infra *Theor. 16. ejusq. coroll.*

THEOREMA IX.

Sint jam AB, a recta ad ipsam OC perpendiculares, loco arcuum figuræ præcedentis; itemque subtangens OD sit eidem OC ad angulos rectos; sit autem, ut priùs, quadratum rami OA ad rectangulum DOP, ut medietas OP ad BM; erunt areæ CEMB, OVP perpetuò æquales.



Uctis infinitè proximis Oap, abm, & arcubus PL, AH, atque aI ipsi OC parallela, erit Bb, sive AI, ad ad PL in ratione composita ex AI ad AH, & AH ad PL; sed prima ratio est eadem, quæ sinus anguli AaI [vel ADO] ad sinū anguli AaH, seu DaO, aut DAO, quę ex trigonometricis, eadem est rationi oppositorum laterum OA, OD; secunda autē ratio eadem est, quæ ramorum OA, OP, ex quibus duabus rationibus componitur & ratio quadrati OA ad rectangulum DOP, idest per constructionem dimidiæ OP ad BM; ergo erit Bb. PL :: OP; 2. BM; & ideò rectangulum MBbm = PL in OP : 2, idest = triangulo, aut sectori POL, sive POp; quare constat propositum.

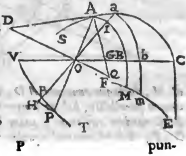


COROLL. I. Infinitis modis similiter variabitur alterutra figurarum PVO, MEC, pro diversa curva CaA, qua uti quis velit ad assignandam alteri ex datis figuris aliam aream æqualem, per hujus Theorematis constructionem.

COROLL. II. Si quadrata OA æquentur semper rectangulis DOP, & ipsis OP æquales ponantur BM, resultabit area CEMB prioris OVP dupla; eritque pariter curva VP = curvæ EM, & hęc quidem illius involutæ expansa evadet; nam cum ostensa sit ratio quadrati AO ad rectangulum DOP æqualis rationi Bb ad PL, ubi illa fuerit æqualitatis, etiam hæc dabit Bb = PL, unde cùm et differentia ramorum OP æquetur differentiæ ordinatarum BM, fiet altera convoluta, altera expansa figura, ut supra *coroll. 3. præced.* dictum fuit.

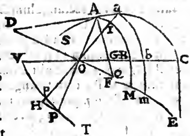
COROLL. Tam in hoc, quàm in præcedenti Theoremate eadem sequentur, si fuerit, ut quadratum OA ad quadradratum OP, ita dimidia OD ad BM; cùm sit enim quadratum OA ad rectangulum DOP, ut dimidia OP ad BM, & rectangulum DOP ad quadratum OP, ut DO ad OP, sive ut dimidia DO ad dimidiam OP, erit ex æquo perturbatè quadratum OA ad quadratum OP, ut dimidia OD ad BM. Quod etiam sic aliter demóstratur. Quadratũ AO ad quadratum OP est, ut triangulũ AOH [*figuræ hujus Theorem.*] vel AOI (*fig. seq. quæ ad præcedens Theorema pertinet*) ad simile OPL *in primo schemmate*, sive OPH *in secundo*, sive, ut elementaria spatia, quæ ab his comparabiliter non differunt, AO*a*, OP*p*; sed propter OD ad OA [*in primo casu*, *& ex demonstratis in hoc theor.*) ut AH ad AI vel *Bb*, sive [*in altero casu*] ut AI ad I*a*, vel pariter *Bb*, erit dimidia OD in *Bb* = triangulo OAH primi, aut OAI secundi casus, idest utrobique = areæ elementari OA*a*; Si ergo dimidia OD ad *BM*, seu rectangulum dimidiæ OD in B*b* ad MB*bm*, est ut OA quadratum ad OP quadratum, nempe ut OA*a* ad OP*p*, ob antecedentium OD: 2 in B*b*; & OA*a* æqualitatem, fient æqualia & consequentia MB*bm*, & OP*p*.

COROLL. IV. Vicissim si figuræ quælibet OVPT, OCEF ita comparatæ fuerint ad communem axem VOC, & ipsarum partes VOP, ECBM semper æquales resecentur, conveniant autem rectæ PO, MB in punctum A, sitque ut quadratum OP ad quadratum OA, ita BM ad aliam, cujus dupla ponatur OD ipsi MB parallela, juncta DA tanget curvam CA*a*, quæ per omnia puncta A, *a* dictorũ concursuũ incedit.



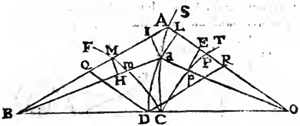
COROLL. V. Idem dico in casu, & figura præcedentis theorematis, si concurrat PO cum arcu BA, radio O *B* descripto, ad pun-

punctum A, ut oriatur similiter figura C*a*A, ponendo ipsi OA perpendicularem OD pariter duplam dictæ quartæ proportionalis post quadrata OP, OA, & rectam BM, juncta enim DA pariter tangens erit ipsius C*a*A: etenim si non hæc OD foret in utroque casu hujus, & præcedentis corollarii subtangens dictæ figuræ, sed alia *s*, foret OA quadratum ad quadratum OP, *ex coroll.* 3. ut dimidia *s*. ad *BM*, sed etiam ex constructione est ut dimidia DO ad *BM*, ergo DO = *s*.



THEOREMA X.

E*X punctis fixis O, B ad quodvis punctum A curvæ C A inclinatis ramis O A, B A secantibus curvas C P, C M in P,*



& M, ductaque tangente A D, & D R, D Q ad utrumque ramorum parallellis, habeat semper O P quadratum ad quadratum B M eandem rationem; quam O A R ad B A Q; erunt areæ O C P, B C M perpetuò æquales.

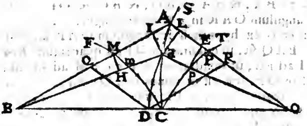
Sum-

Sumpto infinitè proximo puncto a, jungantur Oa, Ba, secantes in p, & m curvas CP, CM, ductisque ex centro O arcubus pE, aL, & ex centro B arcubus MH, aI; erit ratio MH ad pE composita rationibus MH ad aI, & aI ad aL, & aL ad pE; quarum prima eadem est cum ratione Bm ad Ba, seu BM ad BA; secunda eadem, quæ sinus anguli IAa; vel alterni ADR, ad sinum anguli LAa; hoc est eadem quæ laterum AR, RD, aut AR, AQ; tertia denique eadem est, quæ aO ad Op, sive AO ad OP; ergo MH ad pE rationem compositam habet ex BM ad BA, & RA ad AQ, & AO ad OP, sive est ut rectangulum OAR in BM ad rectangulum BAQ in OP; cùm ergo ex hypothesi rectangulum OAR ad rectangulum BAQ sit, ut quadratum OP ad quadratum BM, erit MH ad pE, ut quadratum OP in BM ad quadratum BM in OP, hoc est ut ramus ipse OP ad ramum BM; & ideò sectores OpE, BMH, sive areæ ipsæ OpP, BMm, perpetuò æquabuntur; ex quo constat propositum.

COROLL. I. Data ergo alterutra ex his figuris, puta OCP, alteram CMB ipsi æqualem constituemus, electa qualibet alia curva CaA, et puncto fixo B, ductisque ramis OA, BA, necnon tangente AD, completoque parallelogrammo ARDQ, faciendo, ut OAR ad BAQ, ita quadratum dati rami OP ad quadratum BM, cujus ultimum punctum M ad alteram curvam CmM pertinebit; suscipiet autem quæsita area CMB infinitam varietatem, tum ratione variæ positionis puncti B, tum ratione diversæ curvæ CaA, quæ ad constructionem assumpta fuerit.

COROLL. II. Idem sequitur, si quadratum OP ad quadratum MB fuerit, ut rectangulum ORA ad quadratum RD, hæc enim ratio eadem est rationi rectanguli OAR ad BAQ, ob rationes componentes æquales OA . AB :: OR . RD, quibus addita eadem ratione RA ad RD, vel AQ, fit ratio OAR . BAQ :: ORA . RD quadratum.

COROLL. III. Vicissim ex datis areis BCF, OCT si æquales portiones abscindantur CMB, CPO, & rami BM, OP conveniant in A, curvæ hinc resultantis CAS tangens AD invenietur, sumpta ad libitum rami OA portione AR, tum faciendo, ut quadratum OP ad quadratum BM, ita rectangulum OAR ad rectangulum BAQ, completoque parallelogrammo $QARD$, jungatur diameter AD, quæ erit tangens.



COROLL. IV. Si fuerit CAS conica sectio, cujus foci O, B: quoniam tangens DA bifariam secat angulum OAB (*per* 48. 3. *Conic.*) erit angulus DAB, sive alternus $RDA = RAD$, unde $RD = RA$; itaque cùm ex *Coroll.* 2. sit quadratum ipsius rami OP ad quadratum BM, ut rectangulum ORA ad quadratum RD, erit primum quadratum ad secundum, ut OR ad RD, vel RA, aut ut OA ad AB, vel ut OD ad DB.

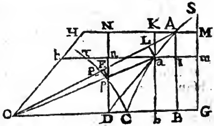
COROLL. V. Quia ex hujus Theorematis, aut Problematis constructione erit quadratum PO in BAQ rectangulum = quadrato BM in rectangulum OAR, si BM supponatur = BA (hoc est si curva CmM conveniat cum CaA, ut ipsamet area BCA æqualis evadat areæ OCP) loco BM, ponendo BA, erit quadratum PO in BAQ = quadrato BA in OAR, hoc est quadratum PO in AQ =

= OAR in BA, & quadratum PO.OAR::BA.AQ:: OA.OR; unde quadratum PO in OR = OAR in OA = quadrato OA in AR; iterumque quadratum PO ad quadratum OA :: AR.OR::BD.DO; ideoque si fiat ut OD ad DB, ita quadratum OA ad quadratum OP, erit punctum P ad Curvam C*p*P, cujus area OCP = ipsi ACB, absque intermedia alia curva constructionem regulante, & pro diversa positione puncti O, diversis modis curva CP construetur, & in alterius generis areas transformabitur: non tamen per idem punctum C transibit, per quod incedit curva CA, nisi cùm fuerint polorum distantiæ OC, *B*C æquales; semper enim distantia verticis curvæ TP*p* à puncto O debet esse media proportionalis inter CO, CB, eoquod puncto A descendente ad C, ipsum etiam punctum D congruit eidem C, unde tam OA quàm OD fit = OC, & BD evadit BC: propptereaque analogia *O*D. DB::*O*Aq. *O*Pq. vertitur in hanc, *O*D ad CB ut *O*Cq. ad quadratum distantiæ verticis curvę TP*p* à puncto *O*.

COROLL. VI. Eadem constructio præcedentis corollarii sic poterat demonstrari. Tam triangula OAD, DAB, quàm *Oa*D, D*a*B sunt in ratione basium *O*D, DB; quare & reliquorum triangulorum ratio eadem erit; igitur A*Oa*. AB*a*::*O*D.DB; si ergo OD.DB::OAq. *O*Pq. hoc est :: *Oa*q. *Op*q. vel *Oa* L. *Op* E, aut A*Oa*. P*Op*, fiet A*Oa*. AB*a* :: A*Oa*. P*Op*; quare AB*a* = P*Op*. & sic semper.

COROLL. VII. Positis iisdem, si fuerit CA conica sectio, cujus foci *O*, *B*, erit *O*P media proportionalis inter *O*A, *AB*; sic enim *O*A quadratum ad *O*P quadratum erit ut *O*A ad A*B*, sive (ob angulum *OAB* à tangente AD bifariam sectum) ut *O*D ad D*B*.

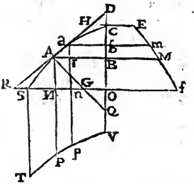
COROLL. VIII. Quodsi (*ut in figura sequenti*) focus *B* ad infinitam distantiam recedat, vel hoc fiet juxta ipsam lineam C*B*, vel juxta aliam huic perpendicularem; quomodo rami paralleli invicem evadent, ipsique C*B* in primo



mo casu æquidistabunt, velut A M, *am*, in secundo illi perpendiculares erunt, quemadmodùm A *B*, *ab*; Et in primo casu figura A C G M dupla erit areæ *O*CP, si fuerit semper *O*D ad A M, ut quadratum A*O* ad quadratum OP; in secundo autem figura A C *B* ejusdem areæ OCP dupla fiet, cùm fuerit OD ad D *B* in eadem ratione quadrati AO ad quadratum OP; Nam (præterquàm id colligitur ex præcedentibus considerationibus infinitè parvorum ad hos casus applicatis) ducta OH tangenti AD, & DN ipsi A *B* parallela, fiet H A = OD; ergo parallelogrammum H A *a* h ad parallelogrammũ AI*m*M est in ratione OD ad AM, ad parallelogrammum verò N *n* I A, aut K A *Bb*, est ut OD ad D *B*, quia ergo utraque hæc ratio eadem supponitur rationi quadrati AO ad quadratum OP, seu trianguli AO*a* ad triangulum OP*p*, erit parallelogrammum H A *a* h ad parallelogrammum A I *m* M, aut A *Bb* K, ut ttiangulum AO*a* ad triangulum PO*p*; sed primum est duplum tertii, nempe H A *a* h duplum est est trianguli A*Oa*, ergo & secundum duplum est quarti, ideoque tum A I *m* M, tum A *Bb* K in utraque hypothesi duplum probatur trianguli P O *p*, & sic semper, unde & area A MGC, vel AC*B* dupla erit spatii OCP.

THEOREMA XI.

IN figuris C ASO, C E M f O, si fuerit, ut subtangens B D ad tangentem D A, ita semper ordinata A B ad ordinatam B M, *BM, erit area CEMFO ad curvam superficiem ex arcu CAS circa axem CO revoluto genitam, ut radius ad circularem peripheriam.*



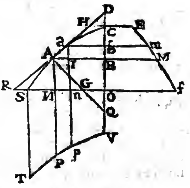
Nam *Bb*, sive *a*I.*a*A :: *B*D.DA :: A*B*.BM; ergo rectangulum extremorum MB*bm* = rectangulo mediorum, idest facto ex ordinata A B in arcum A*a*; Sed hoc ad zonam curvæ superficiei ab arcu A*a* circa CO genitam (quę = rectangulo ipsius A*a* in peripheriam à radio A B descriptam) est ut radius ad circularem peripheriam; ergo & MB*bm* ad ejusmodi zonam est in eadem ratione: & hoc semper; quare ut unum ad unum, ita omnes ad omnes, ideoque integra figura CEMFO ad superficiem à curva CAS descriptam est in eadem ratione, radii circuli ad ejus peripheriam; Quod erat &c.

COROLL. I. Patet, aream CEMFO = Ungulæ cylindricæ super arcu CAS erectæ, & abscissæ plano per axem CO transeunte, atque ad planum COS per angulum semirectum inclinato, quippequæ Ungula nihil aliud est, quàm factum ex ipsis ordinatis A*B* super arcu CAS erectis; cùm ostensum sit, ubique BA in *a*A = M*Bbm*.

COROLL. II. Cùm verò in decem præcedentibus Theorematibus ostensum sit, posse aream CEMFO infinitis modis in alias OVPTS tranformari, inveniri poterunt innumeræ areæ planæ, quæ ad curvam superficiem conoidis, ex figura CASO geniti, sint in data ratione radii ad circumferentiam.

COROLL. III. Eadem sequentur, si A*B* ad BM sit in alia

alia æquivalenti ratione, ut AB ad AQ, vel AN ad AR, aut NG ad GA.

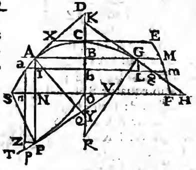


COROLL. IV. Manifestum est, ordinatas BM figuræ $CEfO$ æquari perpetuò normalibus AQ, quæ perpendiculariter curvam CAS secant in A, propter $DB . DA :: AB . AQ :: AB . BM$; Quod si areæ $CEfO$ æqualis $OVTS$, juxta constructionem Theorematis primi, describatur, erunt NP = tangentibus AD, propter $DB . BA :: DA . AQ :: NP . BM$.

COROLL. V. Si CAS sit arcus circuli, cujus centrum Q, fiet EMf linea recta diametro CO parallela, propter normales AQ semper æquales eidem radio: itaque rectangulum ex radio in sinum versum CB æquabitur Ungulæ ex sinibus rectis super arcu CA elevatis (ut alibi ostendimus) eritque idem rectangulum ad portionem sphericæ superficiei ab arcu CA genitam, ut radius ad circumferentiam, sive ut idem rectangulum ad cylindricam superficiem ab ipso circa CB revoluto descriptam; unde æqualitas portionum superficiei sphericæ cum portionibus æquè altis superficiei cylindricæ circumscriptæ, ex multò magis generali principio, quàm unde idipsum Archimedes deduxit, demonstratur.

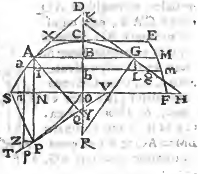
COROLL. VI. Si fuerit CAS parabola, etiam $CEMfO$ ex normalibus AQ in EM ordinatis resultans, erit portio parabolica (*ex Vinc. Viv. de Loc. sol. l. 1. pr.* 38.) unde Ungulæ super arcu parabolico erectæ quadratura, & superficiei conoidalis dimensio innotescit.

COROLL. VII. Si Curvæ CGH subnormales BR sint æqua-



æquales normalibus AQ curvæ CAS, erit cujusvis ordinatæ BG circulus æqualis conoidali superficiei ex correspondente arcu CA, circa CB revoluto, descriptæ; nam ex *Coroll. 6. Theor.* 1. area CEMB, cujus ordinatæ BM = AQ = BR, est æqualis dimidio quadrati *B*G, adeoque est ad circulum radii BG [ob communem altitudinem BG, qua ducta in dimidium BG, resultat dimidium ejus quadrati, ducta verò in dimidiam suam peripheriam, resultat circulus] ut dimidia BG ad dimidiam peripheriam à BG descriptam, vel ut integra B G ad suam peripheriam; aut (*ex hoc Theor.*) ut area CEM*B* ad superficiem conoidalem ab arcu CA progenitam; manifestum est igitur, dictum circulum radii BG æquari præscriptę conoidicę superficiei. Exemplum illustre habemus in circulo radii QC, cujus normales QA sunt semper ejusdem quantitatis, & ideò subnormales BR correspondentis curvæ CG item æquantur; quod indicat, hanc curvam fore parabolam latere recto = 2QC, sive diametro ipsius circuli, propterea que BG quadratum = rectangulo dictæ diametri in sinum versum CB, = quadrato subtensæ CA, ideoque recta coniungens puncta C, & A = BG, & ideò spherica superficies ab arcu CA producta = circulo, quem ejus subtensa CA describeret, ut Archimedes ostendit.

COROLL. VIII. Similiter si figuræ OPN subnormalis NS fuerit æqualis tangenti AD, erit circulus radii NP æqualis eidem conoidicę superficiei ab arcu CA circa CB productæ, ut ex secunda parte quarti Corollarii, & ex præcedenti constat: vel etiam hoc modo; pZ ad Lg rationem habet compositam ex pZ ad ZP vel aI, ex aI ad IA vel GL, & ex GL ad Lg; sed prima ratio æquatur SN, vel AD ad NP: secunda ratio æquatur AB ad BD, aut QA vel BR ad AD: tertia ratio æquatur BG ad BR; ergo pZ ad Lg



est in ratione composita ex BG ad BR, ex BR, ad AD, & ex AD ad NP; hoc est æquatur BG ad NP; aut peripheriæ radio BG ad peripheriam radio NP descriptam, & factum extremorum, idest pZ in peripheriam radii NP, æquatur facto mediorum, idest Lg in peripheriam radii BG; quare Zona circularis, qua circulus radii np excedit circulum radii NP, æquatur circulari Zonæ, qua circulus radii bg superat circulum radii BG; unde & ipsi circuli np, bg, aut NP, BG æquabuntur, ob æquales semper differentias infinitè parvas ipsorum; cùm igitur *ex præced. Coroll.* circulus radii BG æquet superficiem conoidicam ab arcu CA, etiam circulus radii NP eidem conoidicæ superficiei æquabitur.

THEOREMA XII.

I*N figuris OPp, SAC, EMF, si fuerit, ut tangens PT ad subtangentem BD, ita ordinata BM ad ordinatam NP, erit area CEM ad conoidicam superficiem ab arcu OP circa ON generatam, ut radius ad circumferentiam.*

FActa enim consueta constructione infinitè parvorum, erit Pp ad Nn vel aI, ut PY ad NO vel AB, ipsa aI ad ad IA vel *Bb*, ut AB ad BD, & ex æquo P*p*.B*b*:: PY. BD:: BM.NP ex hypothesi: quare factum ex P*p* in NP (idest elementum Ungulæ, ex superficie cylindrica super arcu OP*p* resectæ plano per ON transeunte, ac per 45 gradus basi NOP inclinato] æquabitur rectangulo MB*bm*; unde & tota Ungula toti areæ CEMB æqualis erit; & quia ex dictis *in præced Theor.* illa Ungula est ad superficiē conoidicam ab arcu OP*p* circa ON, ut radius ad circumferentiam, etiam area CEMB ad ejusmodi superficiem conoidicam in eadem ratione erit. Quod erat &c.

COROLL. I. Hac methodo innumeras diversas areas planas eidem curvæ superficiei conoidicæ in dicta ratione respondentes assignabimus, tot nimirum diversis modis, quot variæ curvę CAS ad constructionem assumi possunt, imò & in vario situ collocari.

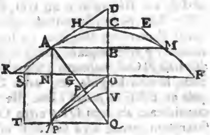
COROLL. II. Quodsi fiat curva CGH, cujus subnormales sint ipsis BM æquales, probabitur, ut in superioribus [*Coroll.* 7. & 8. *Theor XI.*] circulum radii BG æquari superficiei conoidicæ ab OPN circa ON generatæ.

THEOREMA XIII.

Iisdem positis: sit subtangens BD ad taugentem PT, ut constans quædam linea, putà OH, ad ordinatum BM; erit spatium CEMB æquale rectangulo data recta OH in curvam OP.

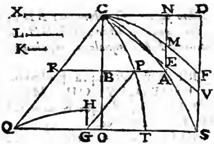
Erit enim, ut supra probavimus (*Theor. pręced.*) B*b*. P*p*:: BD.PY:: OH.BM, ergo rectangulum MB*bm* = OH in P*p*, adeoque & area CEMB = OH in arcum OP. Quod erat &c.

COROLL. I. Pro varietate assumptæ curvæ CAS, diversa spatia CEMB orientur, semper æqualia rectangulo ejusdem OH in dictam curvam OP, adeoque & æqualia inter se.



COROLL. II. Viciſſim dato ſpatio OVPN æquale rectangulum reperiemus, ſub data OC, & arcu CM curvę alicujus contentum, cujus ope propterea ſpatium OVPN quadrabitur, idque aliter, quàm ſupra docuerimus *in Parergo Append.* 1. Si nempe, aſſumpta curva ad libitum CAS quam tangant CH, AH, fiat ſemper OC. PN :: BA — HC. ME, & deſcribatur talis curva CM, cujus tangentes ſint ejuſmodi ME; Id quod tamen generatim abſque quadraturis obtineri nequit, niſi in ſpecialibus caſibus, pro varia ſpecie aſſumptæ curvæ CAS, ſubtangens cujus ad tangentem quæſitæ curvæ debet notam habere rationem conſtantis OC ad ordinatam PN.

THEOREMA XIV.



INſcripta ſit curva CAS rectangulo COSD, expoſitis autem tribus rectis X, L, K in qualibet ratione proportionaliter decreſcentibus, fiat K+X. 2L :: SO.OT :: SD. DF, & fiant curva CPT, CMF, illa ad axem CO, hac ad CD relata, ipſique CAS proportionaliter analoga; Item fiat K+X.X — K :: CO. OQ :: CD. DV, junctiſque CQ, CV ſecantibus coordinatas AB, AN in R, E,

ducta

ducta PG parallela CQ, ordinetur GH = EM; erit punctum H ad curvam QH æqualem curvæ CA.

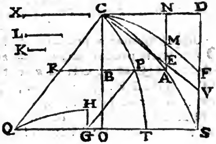
SUmpta minima *K* pro unitate, & facta media L $= n$, erit tertia proportionalis X $= nn$; sit quoque CB $= x$, BA $= y$, QG $= z$, GH $= u$; erit ergo $nn + 1 . 2n$ :: SO . OT :: AB . BP :: $y . 2yn : (nn + 1)$ :: SD . DF :: AN . NM :: $x . 2xn : (nn + 1)$; quare BP $= 2yn : (nn + 1)$ & NM $= 2xn : (nn + 1)$; & quia CB . BR :: CO . OQ :: $nn + 1 . nn - 1$ :: CD . DV :: CN . NE, fiet NE $= [nn - 1] y : [nn + 1]$, & BR $= (nn - 1) x : (nn + 1)$; itaque RP, seu QG, ideſt $z = (2yn + (nn - 1) x) : (nn + 1)$; & ME, seu GH ideſt $u = (y [nn - 1] - 2xn) : [nn + 1]$; ergo $dz = (2n dy + (nn - 1) dx) : (nn + 1)$; & $du = (dy (nn - 1) - 2n dx) : (nn + 1)$ unde $dz^2 = [4nn dy^2 + 4n (nn - 1) dx dy + [nn - 1]^2 dx^2] : [nn + 1]^2$; & $du^2 = [dy^2 (nn - 1)^2 - 4n (nn - 1) dx dy + 4nn dx^2] : [nn + 1]^2$; ideoque $dz^2 + du^2 = (4nn + (nn - 1)^2, [dx^2 + dy^2] : [nn + 1]^2$ quod $= [dx^2 + dy^2], (4nn + n^4 - 2nn + 1) : (n^4 + 2nn + 1)$ ac denique, ob coeficientē numeratoris $(4nn + n^4 - 2nn + 1)$ æqualem denominatori $[n^4 + 2nn + 1]$, remanet $dz^2 + du^2 = dy^2 + dx^2$, & radix unius = radici alterius; sed prima eſt differentialis curvæ QH, altera verò differentialis curvæ CA, ut notum eſt, quare ipſæmet curvæ CA, QH, quarum differentiæ perpetuò æquantur, invicem pariter æquales fient. Quod erat &c.

COROLL. I. Pro varia ratione linearum X, L, aut L, K, manifeſtum eſt diverſam ſpeciem curvæ QH prodituram eidem datæ CA longitudine æqualem.

COROLL. II. Si curva CA ſit geometrica, ſive, ut loqui amant recentiores, algebratica, etiam QH geometrica, aut algebratica erit; Nam ejus coordinatæ z, & u datam rationem habent dependentem ex ratione ipſarum x, y, ita ut ſi hæc geometricè, aut algebraticè exprimi poſ-

ſit

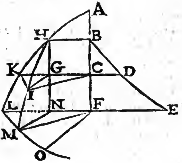
sit independenrer à logarithmis, aut quadraturis, aut rectificatione curvarum, etiam illa pariformiter exponi queat æquatione, nullam quadraturam, nullum logarithmum, nullam curvæ rectificationem involuente.



COROLL. III. Et cùm hæc ipsa curva QH rursus in alias pari methodo transformari possit, hoc etiam ex capite varia seges curvarum semper longitudine æqualium, sed specie differentium, & quidem semper geometricarum, suboritur.

THEOREMA XV.

Solidum ex figura ALF, circa axem AF rotata, productum secetur plano HNM, tum ad planum per axem ALF, tum ad basim circuli FLO perpendiculari, & sectio fiat curva HIM; sint autem rectangula GCD, NFE æqualia portionibus HIG, HMN prædictæ sectionis: dico, rectangulum ex eadem HB in curva portionem BD = figura KHBC.



Secetur enim rursus plano ad basim parallelo CKI, eritque IG quadratum cum quadrato GC æquale qua-

quadrato CI, seu CK, ob circulum, ideoque si ponatur $HB = a$, $CK = z$, $CB = x$, $CD = y$, erit $GI = \sqrt{(zz - aa)}$; cùm ergo ubique area HGI, seu f. $\sqrt{(zz - aa)}dx$, æquetur rectangulo GCD, idest ay, erit differentiando $\sqrt{[zz - aa]}\, dx = ady$, & quadrando, $zzdx^2 - aa\,dx^2 = aa\,dy^2$, ac per antithesim $zzdx^2 = aa\,dx^2 + aa\,dy^2$, ergo extrahendo radicem, $zdx = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, hoc est elementum areæ HBCK = rectangulo ex HB in elementum curvæ BD; unde integrando, area KHBC = HB in curvam BD. Quod erat &c.

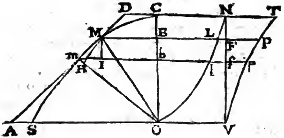
COROLL. I. Quoties ergo ordinata in elementum abscissæ æquatur constanti in elementum alterius curvę, putà $zdx = a\sqrt{[dx^2 + dy^2]}$ semper habetur $\sqrt{(zz - aa)}dx = ady$, & summa ex dictis radicibus $\sqrt{(zz - aa)}$ in dx, divisa per a, dat ordinatam y curvæ rectificabilis per aream cujus primum elementum erat zdx, ut alias *in Parergo Append.* 1. innuimus.

COROLL. II. Eodem modo, sumpta quavis alia constanti b, si $\sqrt{[zz - bb]}\, dx$ æquetur b in elementum ordinatæ u, rursus habebitur $zdx = b$ in elementum curvę $\sqrt{(dx^2 + du^2)}$; adeoque si fiat primò $\sqrt{(zz - aa)}\,dx = a$ in elementum ordinatæ dy, tum secundò $\sqrt{[zz - bb]}\, dx = b$ in elementum ordinatæ du, tam curva prima in a, quàm curva secunda in b, erunt invicem, & eidem areæ f. zdx æquales; proptereaque habebitur secunda curva, cujus ordinatæ u, ad curvam priorem, cujus ordinatæ y, in data ratione, constantis a prius assumptæ, ad alteram constantem b.

COROLL. III. Si LHA sit linea recta, solidum ex ipsa circa AF evadit Conus, & sectio HMN hyperbola, ex cujus ideo quadratura pendet constructio curvæ BDE quæ ducta in BH æquetur areæ trapezii rectilinei HLFB.

COROLL. IV. Similiter in plano (*ut in figura sequenti*) exposita quapiam figura CTVO cum adscripto rectangu-

lo

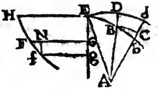


lo CNVO, si differentiæ quadratorum PB, BF ponatur æquale quadratum BL, ut oriatur curva NLO, & spatio CNLB semper fiat æquale rectangulum FBM, habebitur curva CMS, quæ ducta in NC æquabit spatium CTVO, ut eodem calculo constat; sicut vicissim, dato spatio CNLO, cujus portiones quælibet CNLB æquales fiant rectangulo CN in BM, & posito quadrato BP = aggregato quadratorum CN, BL, resultat spatium CTVO = rectangulo ex CN in curvam CMS.

COROLL. V. Cùm autem spatium CTVO infinitis modis (*per decem priora theoremata, eorumque corollaria*) in alias areas transformari possit, ejusque ordinatarum quadrata excedere queant quadratum constantis CN, dictisque excessibus æqualia poni quadrata aliarum ordinatarum, atque absolvi constructio Corollarii præcedentis, manifestum est, alias & alias curvas invicem, aut eidem datæ CMS (ex cujus tangentibus DA in BP ordinatis, *ex constr. prop. Append.* 1. ortum fit spatium CTVO) æquales innumeris modis construi posse, imo & fieri in data ratione, si pro constanti CN latere rectanguli CNVO, alia major aut minor in data ratione adhiberetur, juxta calculum Corollarii II.

THEO-

THEOREMA XVI.



*SI rami AB, A*b *desinentes in curvam EB*b *producantur in D*, d *ad arcum circularem ED*d *centro A descriptum, & superficies cylindrica, quæ prodiret ex quolibet ramo AB ad correspondens punctum D super eodem arcu perpendiculariter erecto, applicetur ad ipsummet radium AE, detque latitudinem EG, ad quam ordinetur GF = ramo AB, erit curva hinc orta HF*f *= curva primò proposita EB*b.

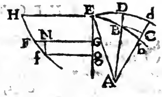
DUcatur eodem centro A arcus BC, occurrens in C ramo infinitè proximo Abd, sitque gf pariter infinitè proxima FG, atque fN axi EG parallela; Cùm ergo summa ex omnibus ramis EA, BA, bA normaliter super arcum EDd erectis æquetur rectangulo AE in Eg, *ex construct.* erit portio correspondens ramis AB, Ab infinitè proximis super arcu Dd erectis, hoc est (ob infinitè exiguam differentiam) rectangulum AB in Dd = AE in Gg; ideoque AE . AB :: Dd . Gg; sed etiam :: Dd . BC, ergo Gg, vel fN = BC; sed & ordinatarum differentia FN = ramorum differentiæ bC, ergo Ff potentia æqualis ipsis FN, Nf, æquabitur Bb pariter potentia æquali ipsis bC, BC; quare & tota curva HFf toti EBb æquabitur. Quod erat &c.

COROLL. I. Datæ curvæ EBb infinitis modis aliam diversam æqualem assignare licebit, prout aliud, atque aliud punctum A, sive intra, sive extra curvam eligemus pro centro arcus EDd.

COROLL. II. Sunt autem areæ AEBb, EgfFH, illa quidem involuta, hæc verò expansa (quales *Theor.* 8. expo-

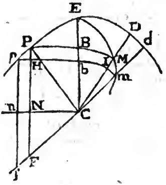
 suimus)

fuimus), unde posterior semper est dupla prioris, nam parallelogrammum $GNfg$, & triangulum BAb habent bases fg, Ab æquales, *ex hypothesi*, necnon pares altitudines fN, BC, ut jam probavimus, unde illud hujus est duplum. Confer dicta *Theor.* 8. *Coroll.* 4.



THEOREMA XVII.

Figura CEPN, cujus coordinatæ PB, PN, fiat reciproca CEPF, sumptis semper PF, pf tertiis proportionalibus post ipsas PN, pn, & constantem CE, qua ut radio describatur arcus circularis EDd, fitque area PECF = CED rectangulum, itemque area pECf = CEd rectangulum, & sic semper, junctisque radiis CD, Cd eodem centro C describantur arcus BM, bm. Erit curva EPp curvæ EMm æqualis.



Esto $EC = a$, $CB = x$, $ED = z$, $PB = y$, $Dd = dz$, $Hp = dy$ erit $PF = aa:x$, ex constructione; sed quia semper area $PECF =$ rectangulo CED, seu dupla est sectoris CDE, fit etiam, ut zona $PpfF$ fit semper = rectangulo CDd, seu dupla talis sectoris; quare $aady:x = adz$, sive $ady:x = dz$, ideoque $a.x::dz.dy::Dd.Im$, ergo $Im = dy = pH$; sed & $MI = Bb = PH$, ergo Pp

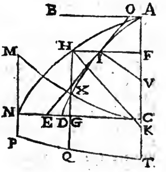
(poten-

[potentia æqualis utrique pH, PH] æquatur Mm (pariter potentia æquali ipsis Im, MI) unde & tota curva EPp toti EMm æquabitur. Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc infinitis modis eadem curva EPp in aliam EMm æqualem transformari poterit, prout punctum C remotiùs, aut propiùs ad punctum E acceptum fuerit, unde varia magnitudo figuræ PECN, & diversa area EPFC priori reciproca ex hac constructione resultat, proindeque & diversa curva EMm, nunc contractior, nunc amplior evadit.

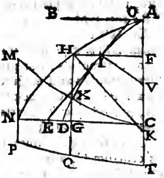
COROLL. II. Si linea EPp sit quadrans circuli habentis centrum C, adeoque sit continuatio quadrantis ED, erit EMm semicirculus subdupli radii, nam arcus ED evadet $=$ EP, propter rectangulum CED $=$ areæ quadrantis reciprocæ PECF $=$ duplo sectoris CEP (*per cap. 8. Hugen. num. 6.*) $=$ rectangulo CEP; unde CM $=$ CB $=$ sinui complementi arcus ED, aut EP.

THEOREMA XVIII.



Curvæ CXM, AID, TQP, AHN ita referantur, ut ducta ubilibet ordinata QGXH, & ad curvam AH perpendiculari HK, & ordinata HF occurrente in I curvæ AID, quam tangat OE parallela CN, AB definita, sit semper quadratum KF ad quadratum FH, ut quadratum EO ad aggregatum quadratorum datæ AB, & ordinatæ GQ, spatio autem CTGQ sit æquale rectangulum ex data AB in GX. Erit curva MXC ad curvam AID, & quilibet arcus CX ad arcum correspondentem AI, in data ratione AC ad AB.

 Po-



Ponatur enim AC $= a$, AB $= b$, AF $= x$, FI $= u$, FH $= y$, GX $= z$, EO $= t$, FK $= p$, GQ $= q$; ergo, *ex hypothesi*, $pp . yy :: tt . bb + qq$; unde $bb + qq = yytt : pp$; & quoniam spatium GTGQ, seu summa ex omnibus $qdy = bz$, erit differentiando $qdy = bdz$, & quadrato $qqdy^2 = bbdz^2$, & ex superiori æquatione $qq = yytt : pp - bb$, ergo $ttyydy^2 : pp - bbdy^2 = bbdz^2$, & per antithesim $ttyydy^2 : pp = bbdz^2 + bbdy^2$; quare extrahendo radicem, $tydy : p = b\sqrt{(dz^2 + dy^2)}$; sed quoniam $p . y :: dy . dx$, seu $ydy : p = dx$, erit $tydy : p = tdx = b\sqrt{[dz^2 + dy^2]}$; at *per Append.* 1. OE applicata in F, seu tdx facit elementum spatii æqualis rectangulo datæ AC in curvam AID, adeoque $tdx = a\sqrt{(dx^2 + du^2)}$, ergo habebitur $a\sqrt{[dx^2 + du^2]} = b\sqrt{[dz^2 + dy^2]}$; & ideò $\sqrt{[dz^2 + dy^2]} . \sqrt{[dx^2 + du^2]} :: a . b$; nempe elementa curvæ CXM ad elementa curvæ AID sunt semper in eadem constanti ratione CA ad A*B*. Quod erat &c.

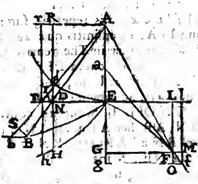
COROLL. I. Hinc patet, posse infinitis modis datæ curvæ AID aliam CXM in data ratione assignari, prout diversa curva AHN assumetur (cujus tamen ordinatæ HF ad correspondentes arcus datæ curvę AI sint in minori ratione, quàm sit ratio proposita AC ad A*B*) & facta deinde constructione, quæ in Theoremate supponitur, diversæ speciei curva CXM quæsito satisfaciens habebitur.

COROLL. II. Si supponatur A*B* = AC, facta eadem constructione, habebitur curva CXM = datę AID.

CO-

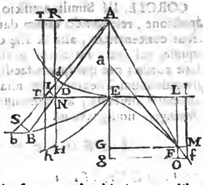
COROLL. III. Simili artificio, & parum mutata constructione, resolvendo aream datę, vel assumptę curvę in arcus concentricos, aliæ & alię curvæ construi possent vel æquales vel juxta rationem præscriptam correspondentes datæ curvæ; nec quidpiam facilius, quam ad exemplum præcedentium Theorematum alia, & alia innumera similis commatis invenire, ac demonstrare; duo tamen adhuc subjungere non gravabor.

THEOREMA XIX.



Curvæ EBb, *EF*f *ita referantur, ut ex quodam fixo puncto A eductis ad priorem ramis AB*, *A*b, *secantibus rectam positione datam EN in N*, n, *ac per hæc puncta ordinatis* RNH, rnh, *quæ sint ad ramos BA*, b*A*, *ut quadratum AE ad quadratum AN, vel A*n, *sit semper spatium RAEH = AEG rectangulo, & spatium* r*AE*h *= rectangulo AE*g; *centro autem E ducto arcu circulari ED*d, *sint ordinatæ GF*, gf *ipsis DB*, db *æquales; Dico etiam curvas EB, EF invicem coæquari*.

SUpponantur E*B*, E*b*, & reliquę hinc pendentes lineæ, fieri infinitè proximæ; eritque spatium elementare RHh*r* = AE in G*g*; unde RH. AE :: G*g*. N*n*; sed, *ex hypothesi*, *B*A. RH :: NAq. AEq. sive [ut alibi probatum est, *par: 1. de Circ. prop: 9.*] :: N*n*. D*d*; ergo ex æquo perturbatè, BA. AE :: G*g*. D*d*; sed & BA. AE :: BS. D*d*; ergo BS = G*g* = FO; ipsi autem S*b* differen-



rentiæ interceptarum BD, æquatur O*f* differentiæ ordinatarum GF; ergo & B*b* = F*f*, cum sint hypothenusæ similium, & æqualium triangulorum BS*b*, FO*f*; quare & tota curva EB*b* = curvæ EF*f*; Quod erat &c.

COROLL. I. Hinc data curva qualibet EB*b*, poterit infinitis modis alia EF*f* huic æqualis reperiri, sumpto ad arbitrium quolibet puncto A, ex infinitis quæ assignari possunt, & facta constructione, quæ in Theoremate supponitur, donec oriatur prædicto modo curva EF*f*, quæ rursus infinitis modis in alias transformabitur, ductis ex quolibet puncto, veluti *a*, ramis *a*F, ac repetita simili constructione.

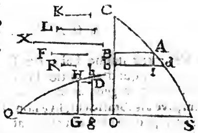
COROLL. II. Si fuerint continuè proportionales AE, AN, AB, fiet AEq. ad ANq. (sive RH ad AB) ut AE, vel RN ad AB; ergo RN = RH, & curva HE congruit rectæ NE, & spatium RAEH (quod = AEG rectangulo) congruit rectangulo RAEN; itaque EN = EG = FL; quia verò in hoc casu BAD (seu BDA † DAq.) = NAq. = NEq. † AEq., ablatis DAq. AEq. æqualibus, fit BDA = NEq. unde & GF, seu EL in EA = FLq. Ergo EF*f* parabola est [concavitate tamen ad axem EL obversa] cujus parameter AE. Quod ipsum jam indicaveram *in Hugenianis pag.* 197. curvam scilicet, in quam desinunt rami tertio loco proportionales post radium, & secantem, posse cum parabolica curva comparari.

COROLL. III. Proposito spatio quadrabili HEN, licebit infinitas curvas æquales determinare; sumpto quippe puncto quolibet A, & completo rectangulo adjacente eidem

spa-

ſpatio NEAR, junctaque NA, fiat ut AEq. ad ANq. ita RH ad aliam R*B*, & ſpatio quadrabili RAEH applicato ad AE, fiat latitudo EG, ſitque ordinata GF = *B*D, ideſt exceſſui rami A*B* ſupra AE; fiet curva EF = curvę E*B*.

THEOREMA XX.



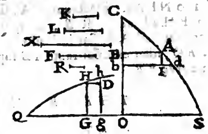
E*Xpoſitis quibuſvis numeris, aut lineis K, L, X triangulum rectangulum conſtituentibus, cujus alterum latus K ponatur* = 1, *alterum L* = n, *adeoque hypothenuſa* X = $\sqrt{nn+1}$ = g; *dataque curva C A S, cujus abſciſſa C B* = x, *ordinata B A* = y, *ſi huic altera curva* QHh *ita reſpondeat, ut abſciſſa Q G accepta* = z = y : g − nx : g, *ordinata G H evadat* = m = ny : g + x : g; *Erunt curvę C A, Q H invicem æquales.*

ERit enim quadratum ipſius G*g*, ſive HD differentię axis, ideſt $dz^2 = dy^2 : gg - 2ndydx : gg + nndx^2 : gg$; & quadratum differentiæ ordinatæ *b*D, hoc eſt $dm^2 = nndy^2 : gg + 2ndydx : gg + dx^2 : gg$; ergo quadratum elementi curvæ H*b*, ideſt $dz^2 + dm^2 = (nn+1)$, $(dx^2 + dy^2) : gg$; ſed ex hypotheſi $nn + 1 = gg$, unde $(nn+1) : gg = 1$, ergo fiet $dz^2 + dm^2 = dx^2 + dy^2 =$ quadratis AI, & I*a*, ſeu quadrato elementi A*a* curvę CA: Ex quo liquet propoſitum.

COROLL. I. Pro varietate trium propoſitorum K, L, X, numerorum aut linearum, infinitis modis variabitur curvæ QH priori æqualis conſtructio.

CO-

COROLL. II. Si curva C A S sit algebraica, etiam Q H talis erit, nam ejus coordinatæ z, u determinantur per ipsas coordinatas prioris x, y, & per datas lineas K, L, X.



CONCLUSIO.

INnumeræ itaque habentur solutiones *Problematis Bernoulliani*, quod ab initio hujus Appendicis proposui; & quidem, tum generatim inveniendo Curvam datæ æqualem, sive algebratica sit, sive non; tum verò etiam determinatè itaut, si data curva sit algebratica, etiam alia talis resultet. Hoc quidem postremum speciatim docetur *Theorem.* 14. & 20. ut in eorum Corollariis notavimus; illud verò primum in omnibus reliquis post duodecimum occurrentibus Theorematibus, eorumque corollariis pręstari posse innumeris modis, qui ex doctrina pręcedentium omnium propositionum, ad transformationem superficierum spectantium, infinitam rursus varietatem suscipiunt, abundè docuimus; Quamquàm & nonnulla alia huc pertinentia jam fuerant à nobis ante vulgata *in Epist. Geometr. ad Th. Cevam* ubi *num.* 19. modum attuli, quo data qualibet figura, à curva linea, & recta illam subtedente comprehensa, cylindrus inveniatur, cui illa ita circumvolvi possit, ut nihilominus talis curva linea in uno plano jaceat, sitque ejusdem cylindri transversa sectio: quemadmodum ex cylindro super Cycloide erecto sectio transversa habetur ęqualis datę parabolę, quę eidem cylindro advolvitur, ut ibi demonstravimus; Et ex cylindro super Tractoria erecto seceſecatur Logarithmica ; ac generatim, ſi relatio ordinatarum ad axem, mutetur in relationem ordinatarum ad curvam, ex cylindro ſuper poſteriori curva excitato ſecabitur ungularis ſuperficies, deſinens in curvam priorem, quę diverſa partium ſuarum poſitione jacebit in plano ſecante: idque ex methodo tangentium inverſa facilè deducitur, tantùm enim curva determinanda eſt, cujus tangens = ſubtangenti prioris curvę datę, ut hęc ex illius cylindro abſcindi queat; idque infinitis modis haberi poteſt, pro varia axis aſſumpti longitudine, & poſitione, ejuſque proportionali ſectione cum axe curvę datę. Similiter, translata figura data in quamlibet cylindricam ſuperficiem (vel etiam in Conicam rectam, ut alias docui *in eadem Epiſt. Geom. n. 7.*) ac perpendicularibus ex quolibet ejus curvę ſic complicatę puncto in aliquod planum [per axem, aut diametrum, aut ordinatam quamlibet baſis cylindricę, aut conicę, qua libuerit inclinatione, traductum, vel aliud huic parallelum] demiſſis, generabitur cylindrica quędam ſuperficies, quæ in planum expanſa curvam exhibebit diverſæ naturæ, ſed priori adamuſſim æqualem.

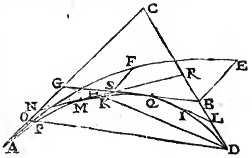
Sed cùm non ſemper hoc modo res geometricè expediri queat, binis dumtaxat modis infinitas hujus Bernoulliani Problematis ſolutiones dictis Theorematibus 14, & 20 propoſuiſſe, ac demonſtraſſe contentus ero, quæ Craigianæ, & Bernoullianæ ſolutioni, *in Actis Lypſix* 1705. *Menſib. Aprilis, & Auguſti*, dudum publicatæ adjungi fortaſſe merentur, ſi quæ illi poſtulant, vel aſſumunt, cum noſtris conſtructionibus conferantur.

Nimirum in ſolutione Craigii monetur, *ut pro* d z *talis aſſumatur valor ex* u, du, *& determinatis compoſitus, ut valores quantitatum* d x, d y *ſint ſummabiles*; quam conditionem D. Bernoullius æquè difficilem, aut fortè difficiliorem ipſo Problemate pronunciat, unde ſuam ipſe ſubdit, à motu quodam *obreptionis, & ſubreptionis*, quem idem Vir

S Cl.

Cl. ingeniosè excogitavit, pendentem, cui & duo Postulata prȩmittit, quorum secundum est, *Curvam algebraicam in partes quotcunque aquè amplas secari posse*, eo sensu, ut extremȩ sectarum partium normales angulos æquales contineant: id quod satis difficilis indaginis non nemini videbitur, cùm prȩter sectiones conicas, in quibus *ex prop.* 50. *lib.* 2. *Apollonii* constat modus id exequendi, in aliis curvis non statim sese obviam proponat praxis, & methodus dictæ sectionis, ut non postulandam, sed indicandam, ac demonstrandam quis prȩsumere posset; unde & aliquam in praxi molestiam id quandoque allaturum fatetur ipse Bernoullius *dictorum Actorum pag.* 359.

Quidsi ergo independenter ab ejusmodi motibus obreptoriis, aut subreptoriis, quos veteres Mathematici ad geometricam Problematum solutionem ægrè admisissent, & absque prædicto Postulato secundo, per solam inventionem verticis datæ curvæ (qui habetur ex maxima, aut minima ordinata ad rectam positione datam, per methodos jam vulgatas) doceat quis modum geometricè determinandi puncta singula Curvarum motu obreptorio, vel subreptorio genitarum, nonne operæ aliquod pretium futurum esset? Id nos jam sequenti constructione præstitisse confidimus, ex qua alii infiniti modi ad solvendum Bernoullianum Problema deduci possunt.



Esto igitur curva data AMD, cujus extremæ tangentes AC, DC in punctum C conveniant. Posita ipsi DC = CO, jungatur DO, secans curvam in P, & portionis P M D ver-

vertex sit Q (in quem scilicet incideret maxima ordinata curvæ ad positione datam D P) eritque tangens G Q B ipsi D P parallela, adeoque ad priores tangentes æqualiter inclinata : ordinetur jam B E parallela AC, longitudine æqualis ipsi BD: mox rursus ducta quavis alia curvę tangente MR, ad punctū M ipsis A, & Q interpositum, ponatur similiter DR = RH, & juncta DH secet curvam in K; tum portionis DQK determinetur vertex I, sitque I L tangens curvæ in I, quæ ad utramque tangentem DR, MR æque inclinabitur, & facta tangentis alterius portione MS = IL, ordinetur parallela eidem AC recta SF = LD; eademque methodo alia similia puncta F determinentur. Perspicuum est, curvam AFE per hæc puncta incedentem, eandem ipsam esse, ac quæ per motum obreptionis curvę Q D super ęquè amplam A M Q, à D. Bernoullio describitur; itaque erit illa algebraica, perinde ac data AMD, atque huic prorsus ęqualis. Quodsi ad contrarias partes constructio fieret, nempe à Q versùs G secaretur = Q B, & ab M versùs N sumeretur = MS vel IL, atque ad inferiores partes ibidem ordinarentur B E, S E æquales ipsis B D, L D, oriretur curva æqualis differentię curvarum AMQ, & QID, quam motu subreptionis Vir Cl. designat; unde si supponatur data QID, posita QMA ejus dupla [per duplicationem ramorum ab eodem puncto, velut B, exeuntium, & ad curvam pertingentium], orietur hac arte nova curva = eidem datæ QID; Quod erat inveniendum.

FINIS.

DEO VERITATIS GLORIA.

Quis leget hæc? Min' tu istud ais? Nemo Hercule. Nemo?
Vel duo, vel nemo: turpe, & miserabile. Quare?
A. Persius Sat. 1.

AP-

APPROBATIONES.

NOS D. DAMASCENUS DE MUTIIS

Abbas SS. Hippolyti, & Laurentii de Faventia, & totius Camaldulensis Ordinis Generalis.

CUM opus inscriptum *Quadratura Circuli, & Hyperbolæ &c.* P. D. Guidonis Grandi in Pisano Atheneo Lectoris, & nostræ Congregationis Monachi, aliquot ex eadem Congregatione S. Th. Magistri, quibus id commissum fuit, recognoverint, & in lucem edi posse probaverint, facultatem facimus, ut Typis mandetur, si iis, ad quos spectat, videbitur. Datum Faventiæ ex nostro Monasterio SS. Hippol. & Laur. die 8. Aprilis 1703.

D. Damascenus de Mutiis Abbas Gener. Camald.

Loco ✠ Sigilli.

D. Marius Felix Ferrari Cancell.

Imprimatur. Annibal de Lanfranchis Chicchuli Canon. & Vicar. Gener.

Imprimatur. Cancell. S. Off. Pisarum.

Reimprimatur. Ant. Franc. Palmerini Vic. Gen.

Reimprimatur. Inquisit. Gen. S. Off. Pisarum.

Additiones *Imprimant.* Ant. Franc. Palmerini V. Gen.

Additiones *Imprimant.* Vic. Gen. S. Off. Pis.

cB